Correction du DS3



# EXERCICE 1

**1.(a)** $\omega^{11} = \left(e^{i\frac{2\pi}{11}}\right)^{11} = e^{i2\pi} = \boxed{1}$

$\omega\overline{\omega} = |\omega|^2 = \left|e^{i\frac{2\pi}{11}}\right|^2 = 1^2 = 1^2$ donc $\boxed{\overline{\omega} = \frac{1}{\omega}}$

**1.(b)** On a donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $\overline{\omega}^k = \frac{1}{\omega^k}$ ie $\overline{\omega^k} = \frac{1}{\omega^k} = \frac{\omega^{11}}{\omega^k}$

donc $\overline{S} = \overline{\omega} + \overline{\omega^4} + \overline{\omega^9} + \overline{\omega^5} + \overline{\omega^3}$

$= \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^4} + \frac{1}{\omega^9} + \frac{1}{\omega^5} + \frac{1}{\omega^3}$

$= \omega^{10} + \omega^7 + \omega^2 + \omega^6 + \omega^8 = \boxed{T}$

**2.(a)** $\mathrm{Im}(S) = \sin\frac{2\pi}{11} + \sin\frac{8\pi}{11} + \sin\frac{18\pi}{11} + \sin\frac{10\pi}{11} + \sin\frac{6\pi}{11}$

or $\sin\frac{18\pi}{11} = \sin\left(\frac{7\pi}{11} + \pi\right) = -\sin\frac{7\pi}{11}$

Sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, sin est décroissante et : $\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{6\pi}{11} \leqslant \frac{7\pi}{11} \leqslant \pi$

donc $\sin\left(\frac{6\pi}{11}\right) \geqslant \sin\left(\frac{7\pi}{11}\right)$

donc $\sin\left(\frac{6\pi}{11}\right) - \sin\left(\frac{7\pi}{11}\right) \geqslant 0$

Donc $\sin\left(\frac{18\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{11}\right) \geqslant 0$

et pour $x \in [0, \pi]$, $\sin(x) \geqslant 0$

donc $\sin \frac{2\pi}{11} \geqslant 0$ et $\sin \frac{8\pi}{11} \geqslant 0$ et $\sin \frac{10\pi}{11} \geqslant 0$

Ainsi $\boxed{S \geqslant 0}$ comme somme de termes positifs.

3. $S + T = \sum_{k=1}^{10} \omega^k = \left(\sum_{k=0}^{10} \omega^k\right) - 1$

$= \frac{1 - \omega^{11}}{1 - \omega} - 1$ car $\omega \neq 1$ car $\frac{2\pi}{11} \neq 0 \, [2\pi]$

$= 0 - 1 = \boxed{-1}$

$$S \times T = (\omega^3 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^9 + \omega^{11}) + (\omega^6 + \omega^{10} + \omega^{11} + \omega^{12} + \omega^{14})$$
$$+ (\omega^{11} + \omega^{15} + \omega^{16} + \omega^{17} + \omega^{19}) + (\omega^7 + \omega^{11} + \omega^{12} + \omega^{13} + \omega^{15})$$
$$+ (\omega^5 + \omega^9 + \omega^{10} + \omega^{11} + \omega^{13})$$

En exploitant $\omega^{11} = 1$ on a :

$$S \times T = 5 + 2\omega + 2\omega^2 + 2\omega^3 + 2\omega^4 + 2\omega^5 + 2\omega^6 + 2\omega^7 + 2\omega^8 + 2\omega^9 + 2\omega^{10}$$

$= 5 + 2(S + T) = 5 - 2 = \boxed{3}$

4. Donc S et T sont les racines de l'équation :

$$z^2+z+3=0$$

$\Delta = 1-12=-11<0$ donc $z=\dfrac{-1\pm i\sqrt{11}}{2}$

Comme $\mathrm{Im}(S)\geq 0$ on a : $\boxed{\begin{array}{l} S=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{11}}{2} \\ T=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{11}}{2}\end{array}}$

5. (a) $i.\tan\left(\dfrac{3\pi}{11}\right)=i.\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{11}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{11}\right)}=i.\dfrac{\dfrac{e^{i3\pi/11}-e^{-i3\pi/11}}{2i}}{\dfrac{e^{i3\pi/11}+e^{-i3\pi/11}}{2}}$

$$=\frac{e^{i3\pi/11}-e^{-i3\pi/11}}{e^{i3\pi/11}+e^{-i3\pi/11}}$$

$$=\frac{\cancel{e^{-i3\pi/11}}}{\cancel{e^{-i3\pi/11}}}\times\frac{e^{i6\pi/11}-1}{e^{i6\pi/11}+1}=\boxed{\frac{\omega^3-1}{\omega^3+1}}$$

et $-\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(-\omega^3)^k=\left(-\sum_{k=0}^{10}(-\omega^3)^k\right)+1=-\frac{1-(-\omega^3)^{11}}{1-(-\omega^3)}+1$

or $(-\omega^3)^{11}=-\omega^{33}=-(\omega^{11})^3=-1^3=-1$

donc $-\sum_{k=1}^{10}(-\omega^3)^k = \frac{-2}{1+\omega^3} + 1 = \boxed{\frac{\omega^3-1}{\omega^3+1}}$

5.(b) $4i.\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = 4i.\frac{e^{i2\pi/11}-e^{-i2\pi/11}}{2i} = 2e^{i2\pi/11} - 2e^{-i2\pi/11}$

$= 2\omega - 2\overline{\omega} = 2\omega - 2\frac{1}{\omega} = 2\omega - 2\omega^{10}$

$= \boxed{2(\omega-\omega^{10})}$

5.(c) On a donc :

$i.\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) + 4.i.\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = -\sum_{k=1}^{10}(-\omega^3)^k + 2\omega - 2\omega^{10}$

$= \omega^3 - \omega^6 + \omega^9 - \omega^{12} + \omega^{15} - \omega^{18} + \omega^{21} - \omega^{24} + \omega^{27}$
$- \omega^{30} + 2\omega - 2\omega^{10}$

$= \omega^3 - \omega^6 + \omega^9 - \omega + \omega^4 - \omega^7 + \omega^{10} - \omega^2 + \omega^5$
$- \omega^8 + 2\omega - 2\omega^{10}$

$= \omega - \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 - \omega^6 - \omega^7 - \omega^8 + \omega^9 - \omega^{10}$

$= S - T = i\sqrt{11}$

donc $\boxed{\tan\frac{3\pi}{11} + 4.\sin\frac{2\pi}{11} = \sqrt{11}}$

# EXERCICE 2

**1.(a)** $(1-z)S_n + nz^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} kz^k - \sum_{k=1}^{n} kz^{k+1} + nz^{n+1}$

$= \sum_{k=1}^{n} kz^k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)z^k + nz^{n+1}$ par chgt d'indice

$= z + \sum_{k=2}^{n} (k-(k-1))z^k - \cancel{nz^{n+1}} + \cancel{nz^{n+1}}$ par Chasles et linéarité

$= z + \sum_{k=2}^{n} z^k = \boxed{\sum_{k=1}^{n} z^k}$

**1.(b)** $\sum_{k=1}^{n} z^k = \left(\sum_{k=0}^{n} z^k\right) - 1 = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} - 1$ car $z \neq 1$

$= \frac{z - z^{n+1}}{1-z}$

donc $S_n = \frac{1}{1-z} \times \left(\frac{z-z^{n+1}}{1-z} - nz^{n+1}\right)$

$= \frac{1}{(1-z)^2} \times \left(z - z^{n+1} - nz^{n+1} + nz^{n+2}\right)$

donc $\boxed{S_n = \frac{z-(n+1)z^{n+1} + nz^{n+2}}{(1-z)^2}}$

2.(a) Par Fubini triangulaire :

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{k=s}^{n}\rho^{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{s=1}^{k}\rho^{k}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k\rho^{k}$$ car $\rho^k$ ne dépend pas de s.

donc $$\boxed{S_n=\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{k=s}^{n}\rho^{k}\right)}$$

2.(b) $$\sum_{k=s}^{n}\rho^{k}=\sum_{k=0}^{n}\rho^{k}-\sum_{k=0}^{s}\rho^{k}$$

$$=\frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho}-\frac{1-\rho^{s+1}}{1-\rho}=\frac{\rho^{s+1}-\rho^{n+1}}{1-\rho}$$

donc $$S_n=\frac{1}{1-\rho}\times\left(\sum_{s=1}^{n}\rho^{s+1}-\sum_{s=1}^{n}\rho^{n+1}\right)$$

or $$\sum_{s=1}^{n}\rho^{n+1}=n\rho^{n+1}$$

$$\sum_{s=1}^{n}\rho^{s+1}=\rho\times\left(\sum_{s=0}^{n}\rho^{s}-1\right)=\rho\times\left(\frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho}-1\right)$$

Donc $S_n = \frac{1}{1-z} \times \left( z \cdot \frac{z - z^{n+1}}{1-z} - nz^{n+1} \right)$

$$= \frac{1}{(1-z)^2} \times \left( z^2 - z^{n+1} - nz^{n+1} + nz^{n+2} \right)$$

et on retrouve la formule du 1.(b).

3.(a) si $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ alors $z^n = 1$

donc $S_n = \frac{z - (n+1)z + nz^2}{(1-z)^2} = nz \cdot \frac{z-1}{(1-z)^2}$

$$= n\frac{z}{z-1} = n\frac{e^{i2\pi/n}}{e^{i2\pi/n} - 1}$$

$$= \frac{ne^{i2\pi/n}}{e^{i\pi/n} \cdot \left(e^{i\pi/n} - e^{-i\pi/n}\right)} = \frac{ne^{i\pi/n}}{2 \cdot i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} \times \frac{i}{i}$$

$$= -\frac{n}{2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} e^{i\left(\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2}\right)}$$

D'autre part $S_n = \sum_{k=1}^{n} k e^{ik\theta} = \sum_{k=1}^{n} k\cos(k\theta) + i\sum_{k=1}^{n} k\sin(k\theta)$

Donc en identifiant parties réelles et imaginaires :

$$\sum_{k=1}^{n} k.\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = -\frac{n.\cos\left(\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{2}\right)}{2.\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \boxed{\frac{n}{2}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k.\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = -\frac{n.\sin\left(\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{2}\right)}{2.\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \boxed{\frac{-n.\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2.\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}}$$

$$= -\frac{n}{2.\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

seulement si $n \neq 2$