Exercice 1

CORRECTION DS4

1.(a) f est supposée dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus : $\forall x>0,\ f'(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$

donc f' est elle aussi dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car composée de fonctions dérivables.

Donc $\boxed{f \text{ est 2 fois dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$

$$\forall x>0,\ f''(x)=\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=-\frac{1}{x^2}\times f'\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$=-\frac{1}{x^2}\times f\left(\frac{1}{1/x}\right)=-\frac{1}{x^2}\times f(x)$$

donc $\boxed{\forall x>0,\ x^2\times f''(x)+f(x)=0}$

1.(b) y est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ car composée de fonctions 2 fois dérivables.

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad y'(t)=e^t\times f'(e^t)$$
$$y''(t)=e^t\times f'(e^t)+(e^t)^2\times f''(e^t)$$
$$=e^t\cdot f'(e^t)+e^{2t}\times f''(e^t)$$

On a : $\forall x > 0, \quad x^2 . f''(x) + f(x) = 0$

donc : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{2t} . f''(e^t) + f(e^t) = 0$

donc $\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{2t} . f''(e^t) + e^t . f'(e^t) - e^t . f'(e^t) + f(e^t) = 0$

donc $\forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) - y'(t) + y(t) = 0$

donc $\boxed{y \text{ est solution sur } \mathbb{R} \text{ de } \quad y'' - y' + y = 0}$

1.(c) On reconnaît une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

L'équation caractéristique est :

$$r^2 - r + 1 = 0 \quad \text{donc} \quad r = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Donc il existe } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq :} \\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = e^{t/2} \times \left(\lambda . \cos\left(\frac{\sqrt{3} . t}{2}\right) + \mu . \sin\left(\frac{\sqrt{3} . t}{2}\right) \right) \end{array}}$$

1. (d) comme $t = \ln x$ on a $f(x) = y(\ln x)$

Donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\boxed{\forall x > 0,\ f(x) = \sqrt{x} \times \left(\lambda . \cos\left(\frac{\sqrt{3} . \ln x}{2}\right) + \mu . \sin\left(\frac{\sqrt{3} . \ln x}{2}\right)\right)}$$

2. On vient de montrer que si f vérifie $(*)$ alors elle est de la forme ci-dessus.

Réciproquement, soit f de la forme ci-dessus.

En refaisant les calculs à l'envers on montre que :

$$\forall x > 0,\ x^2 . f''(x) + f(x) = 0$$

Mais cela n'est pas $(*)$.

On a pour $x > 0$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} \times \left(\lambda . \cos\left(\frac{\sqrt{3} . \ln x}{2}\right) - \mu . \sin\left(\frac{\sqrt{3} . \ln x}{2}\right)\right)$$

car $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$ et $\sin(-t) = -\sin t$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \left(\lambda . \cos\left(\frac{\sqrt{3} . \ln x}{2}\right) + \mu . \sin\left(\frac{\sqrt{3} . \ln x}{2}\right)\right)$$
$$+ \sqrt{x} . \left(-\frac{\sqrt{3} . \lambda}{2x} \sin\left(\frac{\sqrt{3} . \ln x}{2}\right) + \frac{\sqrt{3} . \mu}{2x} \cos\left(\frac{\sqrt{3} . \ln x}{2}\right)\right)$$

4

Donc : $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{\lambda + \mu\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}.\ln x}{2}\right) + \frac{\mu - \lambda\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right)\right)$

Donc il faut que : $\begin{cases} \lambda = \frac{\lambda + \mu\sqrt{3}}{2} \\ \mu = \frac{\mu - \lambda\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

ce qui donne : $\mu = \mu$ et $\lambda = \mu\sqrt{3}$

Donc les solutions de $(*)$ sont les fonctions f de la forme :

$\forall x \in \mathbb{R}, \; f(x) = \sqrt{x} \times \mu \times \left(\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}.\ln x}{2}\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{3}.\ln x}{2}\right)\right)$

où $\mu \in \mathbb{R}$.

Mais $\sqrt{3}.\cos t + \sin t = 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}.\cos t + \frac{1}{2}.\sin t\right)$

$= 2.\left(\cos\frac{\pi}{6}.\cos t + \sin\frac{\pi}{6}.\sin t\right)$

$= 2.\cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$

Donc $\boxed{f(x) = 2\mu.\sqrt{x}.\cos\left(\frac{\sqrt{3}.\ln x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}$

EXERCICE 2

1. Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \int_0^x \left(\sin(x)\cos(t) - \cos(x).\sin(t)\right).g(t)dt$$

$$= \sin(x).\int_0^x \cos(t).g(t)dt - \cos(x).\int_0^x \sin(t).g(t).dt$$

Les fonctions $x \longmapsto \cos(x).g(x)$ et $\longmapsto \sin(x).g(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, les fonctions $\varphi : x \longmapsto \int_0^x \cos(t).g(t)dt$ et $\psi : x \longmapsto \int_0^x \sin(t).g(t)dt$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = \cos(x).g(x) \quad \text{et} \quad \psi'(x) = \sin(x).g(x)$$

Par sommes et produits de fonctions dérivables, f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \cos(x).\varphi(x) + \cancel{\sin(x).\cos(x).g(x)}$$

$$+ \sin(x).\psi(x) - \cancel{\cos(x).\sin(x).g(x)}$$

$$= \int_0^x \left(\cos(x).\cos(t) + \sin(x).\sin(t)\right).g(t)dt$$

ii/ $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = \int_0^x \cos(t-x).g(t)\,dt}$

1.(b) On a vu que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = \cos(x).\Phi(x) + \sin(x).\Psi(x)$$

donc f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f''(x) = -\sin x.\Phi(x) + \cos^2(x).g(x) + \cos(x).\Psi(x) + \sin^2(x).g(x)$$

$$= -f(x) + (\cos^2(x) + \sin^2(x)).g(x)$$

donc $\forall x \in \mathbb{R},\quad f''(x) + f(x) = g(x)$

donc $\boxed{f \text{ est solution de } y'' + y = g(x)}$

2. Équation homogène $y'' + y = 0$:

les solutions sont les fonctions $x \longmapsto \lambda.\cos x + \mu.\sin x$ où $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$

Donc les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'' + y = g(x)$ sont les fonctions $\boxed{x \longmapsto \lambda\cos x + \mu.\sin x + \int_0^x \sin(x-t).g(t)\,dt \text{ où } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2}$