Correction du DS 5

1

Exercice 1

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note P_n le prédicat : "$u_n \geqslant 1$"

On a $u_0 = 1 \geqslant 1$ donc P_0 est vrai.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n est vrai.

On a donc $u_n \geqslant 1$

or $\frac{1}{2^n} \geqslant 0$ donc $u_n^2 + \frac{1}{2^n} \geqslant u_n^2 \geqslant 1$

Comme $\sqrt{\cdot}$ croissante sur $\mathbb{R}^+$: $\sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}} \geqslant \sqrt{1}$

donc : $u_{n+1} \geqslant 1$

Donc P_{n+1} est vrai.

D'après le principe de récurrence, P_n est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1}$

2. (a) $\frac{1}{2^n} \geqslant 0$ donne $u_n^2 + \frac{1}{2^n} \geqslant u_n^2 \geqslant 0$

donc $\sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}} \geqslant \sqrt{u_n^2}$

ie $u_{n+1} \geqslant |u_n|$

Mais $u_n \geqslant 0$ donc $|u_n| = u_n$.

Donc $u_{n+1} \geqslant u_n$.

D'autre part :

$$u_{n+1} - u_n \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} \iff \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}} \leqslant u_n + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\iff \cancel{u_n^2} + \frac{1}{2^n} \leqslant \cancel{u_n^2} + \frac{u_n}{2^n} + \frac{1}{2^{2n+2}}$$

les 2 membres sont $\geqslant 0$

$$\iff 1 \leqslant u_n + \frac{1}{2^{n+2}} \text{ car } 2^n \geqslant 0$$

$$\iff 1 - \frac{1}{2^{n+2}} \leqslant u_n$$

c'est VRAI car $u_n \geqslant 1 \geqslant 1 - \frac{1}{2^{n+2}}$

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_{n+1} - u_n \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}}$

<u>2.(b)</u> On a donc $\forall k \in \mathbb{N}, \; 0 \leqslant u_{k+1} - u_k \leqslant \frac{1}{2^{k+1}}$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on additionne ces inégalités pour k allant de 0 à $n-1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} 0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}}$$

Le membre du milieu est une somme télescopique. Celui de droite se simplifie avec le changement d'indice $k' = k+1$. On obtient :

$$0 \leqslant u_n - u_0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$$

Comme $u_0 = 1$: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}}$

3. On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} \leqslant 1$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n \leqslant 2$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.
D'après 2.(a) elle est croissante.
D'après le théorème de la limite monotone :

$\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente}}$

4.(a) $v_{n+1} = u_{n+1}^2 = u_n^2 + \frac{1}{2^n} = v_n + \frac{1}{2^n}$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}$

ie $v_n - v_0 = \dfrac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$

ie $\boxed{v_n = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

et $\underline{v_0 = u_0^2 = 1}$

4.(b) On a donc : $\lim_{n \to +\infty} v_n = 3$

Mais $v_n = u_n^2$ donne $\lim_{n \to +\infty} v_n = l^2$

Ainsi $l^2 = 3$. Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$ donc $l \geqslant 1 \geqslant 0$

donc $\boxed{l = \sqrt{3}}$

Pour vérifier :
```
>>> u=1
>>> for k in range(1000):
        u=sqrt(u*u+1/2**k)
```

donne u=1,7320....
et sqrt(3) donne 1.7320....

EXERCICE 2

1. $R^2 = O_3$ donc $\boxed{\forall k \geqslant 2,\ R^k = O_2}$

De plus $\boxed{R^1 = R}$ et $\boxed{R^0 = I_3}$

Comme D est diagonale :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ D^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ c & a^k & 0 \\ 0 & 0 & b^k \end{pmatrix}}$$

$J(a,b) = D + R$

De plus $D \times R = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R \times D.$

On peut donc utiliser la formule du binôme.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$J(a,b)^n = (D+R)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} R^k \times D^{n-k}$$

$$= \binom{n}{0} . R^0 . D^n + \binom{n}{1} . R^1 . D^{n-1} \quad \boxed{\text{pour } n \geqslant 1}$$

$$= D^n + n . R . D^{n-1}$$

$$= D^n + n \begin{pmatrix} 0 & a^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}}$$

et $\boxed{J(a,b)^0 = I_3}$

2. Pour $n \geqslant 2$:

$$V_{n+1} = \begin{pmatrix} v_{n+1} \\ v_n \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_n + 5v_{n-1} - 3v_{n-2} \\ v_n \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\boxed{=N}} \begin{pmatrix} v_n \\ v_{n-1} \\ v_{n-2} \end{pmatrix}$$

On a donc : $\boxed{\forall n \geqslant 2,\ V_n = N^{n-2} \times V_2}$

3.(a) On utilise la méthode du système linéaire.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 9x_3 = y_1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = y_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \boxed{x_1} + 3x_2 + 9x_3 = y_1 \\ -x_2 - 12x_3 = y_2 - y_1 \\ -2x_2 - 8x_3 = y_3 - y_1 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \boxed{x_1} + 3x_2 + 9x_3 = y_1 \\ \boxed{-x_2} - 12x_3 = y_2 - y_1 \\ \boxed{16x_3} = y_1 - 2y_2 + y_3 \end{cases}$$

Le système est de Cramer donc P est inversible

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{16}(-5y_1 - 6y_2 + 27y_3) \\ x_2 = \frac{1}{16}(4y_1 + 8y_2 - 12y_3) \\ x_3 = \frac{1}{16}(y_1 - 2y_2 + y_3) \end{cases}$$

donc $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -5 & -6 & 27 \\ 4 & 8 & -12 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$

3.(b) $P \times J(1,-3) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -27 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

donc $P \times J(1,-3) \times P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{N}$

Par récurrence on obtient que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad N^n = P \times J(1,-3)^n \times P^{-1}}$$

4.

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad N^n = P \times \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \times P^{-1}$$

Et $\forall n \geq 2$, $V_n = N^{n-2} \times V_2$ donc $\forall n \geq 0$, $V_{n+2} = N^n \times V_2$

Comme $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ le produit $N^n \times V_2$

donne la première colonne de N^n.

Donc le coefficient en bas à gauche de N^n est

égal à v_n.

Pour $n \geq 0$: $P \times \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 1 & n+1 & (-3)^n \end{pmatrix}$

8

donc $P \times J(1,-3)^n \times P^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 4n-1+(-3)^n & * & * \end{pmatrix}$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{4n-1+(-3)^n}{16}}$

5.

```
def v(n):
    v0, v1, v2 = 0, 0, 1
    for k in range(3,16):
        v0, v1, v2 = v1, v2, -v2+5*v1-3*v0
    w=(4*n-1+(-3)**n)/16
    print(v2,w)
```

EXERCICE 2

1. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

On a $a_{ij} \geqslant 0$ d'après (i).

D'après (ii) : $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1$

donc $a_{ij} + \underbrace{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} a_{ik}}_{\geqslant 0 \text{ d'après (i)}} = 1$

donc $a_{ij} \leq 1$

Ainsi $\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{ij} \in [0,1]}$

2. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

Alors $(\alpha A + \beta . B)[i,j] = \alpha . A[i,j] + \beta . B[i,j] \geqslant 0$

car produit et somme de nbs $\geqslant 0$.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

Alors $\sum_{j=1}^{n} (\alpha . A + \beta . B)[i,j] = \alpha . \sum_{j=1}^{n} A[i,j] + \beta . \sum_{j=1}^{n} B[i,j]$

$= \alpha + \beta = 1$

Donc $\boxed{\alpha . A + \beta . B \text{ est stochastique}}$

3. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

$$(AB)[i,j] = \sum_{k=1}^{n} A[i,k] \times B[k,j] \geqslant 0$$

car produits et sommes de nbs $\geqslant 0$

Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

$$\sum_{j=1}^{n} (AB)[i,j] = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} A[i,k] \times B[k,j] \right)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} A[i,k] \times B[k,j] \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A[i,k] \times \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} B[k,j] \right)}_{=1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A[i,k] = 1$$

donc $\boxed{\text{AB est stochastique}}$.