Correction DS7

EXERCICE 1

1. On note la famille (u,v,w).

Soient α, β, γ réels tels que $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3}$

Alors $\begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta - \gamma = 0 \\ \alpha - \beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \boxed{\alpha} + 2\beta + \gamma = 0 \\ \boxed{-3\beta} + 3\gamma = 0 \\ \cancel{-3\beta - 3\gamma = 0} \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = -\gamma \\ \gamma \text{ qcq} \end{cases}$

Pour $\gamma = 1$ on trouve donc $u - v + w = 0_{\mathbb{R}^3}$

Donc la famille (u,v,w) est liée.

2. • Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$(x,y,z) \in F \Longleftrightarrow \begin{cases} -y + 2z = x \\ y = y \\ x + y - z = z \end{cases} \Longleftrightarrow x + y - 2z = 0$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -y + 2z \\ y \text{ qcq dans } \mathbb{R} \\ z \text{ qcq dans } \mathbb{R} \end{cases}$

Donc $F = \{(-y+2z, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$

donc $F = \mathrm{Vect}((-1,1,0),(2,0,1))$ donc F est un sev de $\mathbb{R}^3$

Comme les vecteurs $(-1,1,0)$ et $(2,0,1)$ sont non colinéaires, ils forment une famille libre.

Donc la famille $((-1,1,0),(2,0,1))$ est une base de F.

- Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(x,y,z) \in G \iff \begin{cases} -y+z = -2x \\ y = -2y \\ x+y-z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3y = 0 \\ x+y+z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{x} + z = 0 \\ \boxed{y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \\ z \text{ qcq dans } \mathbb{R} \end{cases}$$

Donc $G = \{(-z,0,z) \in \mathbb{R}^3 ; z \in \mathbb{R}\}$.

donc $G = \text{Vect}((-1,0,1))$ donc G est un sev de $\mathbb{R}^3$.

Comme $(-1,0,1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ on sait que la famille $((-1,0,1))$ est libre.

Donc la famille $((-1,0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

EXERCICE 2

1. Il est évident que $(0)_{n\in\mathbb{N}} \in E$. Donc $\underline{E \neq \emptyset}$.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(u,v) \in E^2$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\lambda u+v)_n = \lambda u_n + v_n$

et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\lambda u+v)_{n+3} + 2.(\lambda u+v)_{n+2} - (\lambda u+v)_{n+1} - 2(\lambda u+v)_n$

$= \lambda u_{n+3} + v_{n+3} + 2\lambda u_{n+2} + 2v_{n+2} - \lambda u_{n+1} - v_{n+1} - 2\lambda u_n - 2v_n$

$= \lambda.\left(u_{n+3} + 2u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n\right) + v_{n+3} + 2v_{n+2} - v_{n+1} - 2v_n$

$= \lambda \times 0 + 0$ car $(u,v) \in E^2$

$= 0$

Donc $\lambda u + v \in E$

Ceci prouve que $\underline{E \text{ est un sev de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$.

2.(a) Soit $q \in \mathbb{R}$ tel que la suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $q^{n+3} + 2q^{n+2} - q^{n+1} - 2q^n = 0$

ie $q^n \times (q^3 + 2q^2 - q - 2) = 0$

Pour $n=0$: $q^3 + 2q^2 - q - 2 = 0$ ce qui assure que $q \neq 0$.

Donc $(q-1)(q+1)(q+2) = 0$

donc $q = 1$ ou -1 ou 2.

Réciproquement on vérifie facilement que les suites géométriques $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des éléments de E.

Donc $\underline{E \text{ ne contient que 3 suites géométriques}}$.

2.(b).i. Pour $n=0$: $u_0 = \lambda + \mu + \nu$

Pour $n=1$: $u_1 = \lambda - \mu - 2\nu$

Pour $n=2$: $u_2 = \lambda + \mu + 4\nu$

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu = u_0 \\ \lambda - \mu - 2\nu = u_1 \\ \lambda + \mu + 4\nu = u_2 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \boxed{\lambda} + \mu + \nu = u_0 \\ \boxed{-2\mu} - 3\nu = u_1 - u_0 \\ \boxed{3\nu} = u_2 - u_0 \end{cases}$$

Le système linéaire a donc une unique solution.

Donc (λ, μ, ν) est déterminé de manière unique par les valeurs de (u_0, u_1, u_2).

2.(b).ii. On définit (λ, μ, ν) comme l'unique solution du système linéaire $\begin{cases} \lambda + \mu + \nu = u_0 \\ \lambda - \mu - 2\nu = u_1 \\ \lambda + \mu + 4\nu = u_2 \end{cases}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note H_n le prédicat : "$u_n = \lambda + \mu(-1)^n + \nu(-2)^n$"

Les prédicats H_0, H_1, H_2 sont vrais.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n, H_{n+1}, H_{n+2} sont vrais. Mq H_{n+3} vrai.

On a
$$\begin{aligned} u_{n+3} &= -2u_{n+2} + u_{n+1} + 2u_n \\ &= -2\cdot\left(\lambda + \mu(-1)^{n+2} + \nu(-2)^{n+2}\right) + \left(\lambda + \mu(-1)^{n+1} + \nu(-2)^{n+1}\right) \\ &\quad + 2\cdot\left(\lambda + \mu(-1)^n + \nu(-2)^n\right) \\ &= \lambda - \mu(-1)^n - 8\nu\cdot(-2)^n = \lambda + \mu(-1)^{n+3} + \nu(-2)^{n+3} \end{aligned}$$

donc H_{n+3} est vrai.

Par récurrence à 3 pas : $\forall n \in \mathbb{N}$, H_n est vrai.

Donc il existe $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda + \mu(-1)^n + \nu(-2)^n$

2.(b).iii Tout vecteur de $\mathbb{E}$ est donc combinaison linéaire de $((1)_n, ((-1)^n)_n, ((-2)^n)_n)$ et cette combinaison est unique.

Par théorème on sait donc que $((1)_n, ((-1)^n)_n, ((-2)^n)_n)$ est une base de $\mathbb{E}$

3.(a) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_n$

l'équation caractéristique est $r^2 - 1 = 0$ ie $r = \pm 1$.

Donc $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda + \mu(-1)^n$.

On en déduit que $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}((1)_n, ((-1)^n)_n)$

donc $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{E}$.

Comme les suites $(1)_n$ et $((-1)^n)_n$ sont non colinéaires,

la famille $((1)_n, ((-1)^n)_n)$ est une base de $\mathbb{F}$.

3.(b) Par théorème $\mathbb{G}$ est un sev de $\mathbb{E}$

L'union d'une base de $\mathbb{F}$ et d'une base de $\mathbb{G}$ donne une base de $\mathbb{E}$. Par théorème : $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$

EXERCICE 3

1. (a) Le polynôme $1+X+X^2$ n'a pas de racine réelle car $\Delta = 1-4 = -3 < 0$.

Donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

D'après les théorèmes généraux f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{-1-2x}{(1+x+x^2)^2}$ du signe opposé à $2x+1$

$$f''(x) = \frac{-2(1+x+x^2)^2 + 2(1+2x)^2(1+x+x^2)}{(1+x+x^2)^4} = \frac{6x+6x^2}{(1+x+x^2)^3}$$

du signe de $6x^2+6x = 6x(x+1)$

x	$-\infty$		-1		$-1/2$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
f'	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$f'(x)$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
f	0		$\nearrow$		$4/3$		$\searrow$		0

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = x \iff \dfrac{1}{1+x+x^2} = x \iff x^3+x^2+x-1=0$

On définit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $P(x) = x^3+x^2+x-1$.

P est polynomiale donc P est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P'(x) = 3x^2 + 2x + 1 > 0$ car $\Delta = -8 < 0$

Donc P est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$. Comme P est continue sur $\mathbb{R}$ on sait d'après le théorème de la bijection monotone que P est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Donc $\exists ! \alpha \in \mathbb{R}$, $P(\alpha) = 0$

ie $\underline{\exists ! \alpha \in \mathbb{R},\ f(\alpha) = \alpha}$

On a $P\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3} - 1 = -\frac{12}{27} < 0$

et $P(1) = 2 > 0$

Comme P est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: $\underline{\alpha \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]}$

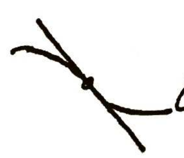
On sait que $\dfrac{1}{1+t} \underset{t \to 0}{=} 1 - t + t^2 - t^3 + o(t^3)$

donc $f(x) \underset{x \to 0}{=} 1 - (x + x^2) + (x + x^2)^2 - (x + x^2)^3 + o(x^3)$

$f(x) \underset{x \to 0}{=} 1 - x - \cancel{x^2} + \cancel{x^2} + 2x^3 - x^3 + o(x^3)$

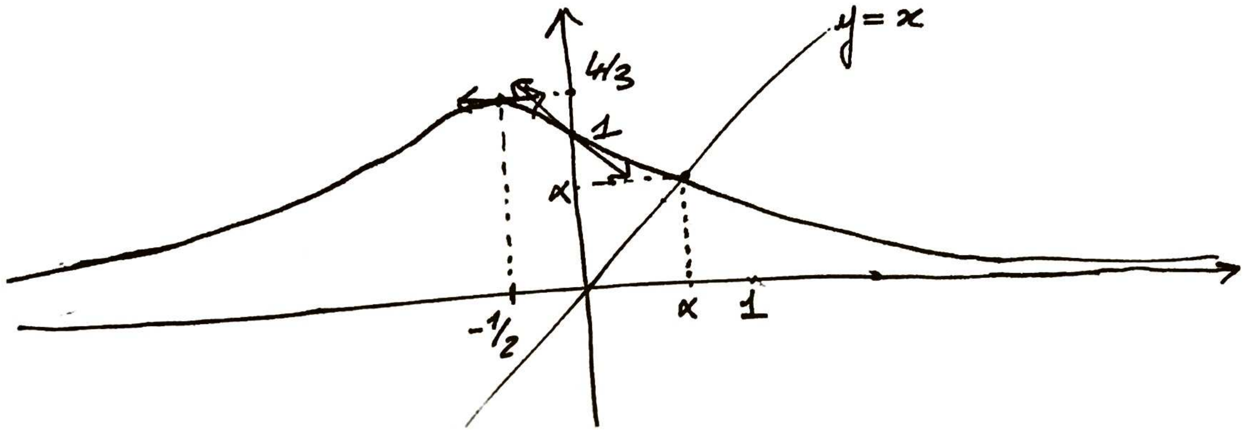
$$\boxed{f(x) \underset{x \to 0}{=} 1 - x + x^3 + o(x^3)}$$

La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 1 - x$ et localement :



$\mathcal{C}_f$

car $f(x) - (1 - x) \underset{x \to 0}{\sim} x^3$



1.(b) D'après les variations de f on a : f strictement décroissante sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

De plus $f\left(\frac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}} = \dfrac{9}{13}$

et $f(1) = \frac{1}{3}$

donc $\forall x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$, $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq \frac{9}{13} \leq 1$

donc l'intervalle $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ est f-stable.

Comme $u_0 = 1 \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$ on a par récurrence immédiate que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$.

1.(c) On a le tableau de variations

x	0	$1/3$	1	$+\infty$
f'	-1	$-\frac{135}{169}$	$-1/3$	0

donc $\forall x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right], \quad -\frac{135}{169} \leqslant f'(x) \leqslant -\frac{1}{3} \leqslant 0$ 9

donc : $\quad \forall x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right], \ |f'(x)| \leq \frac{135}{169} = C$

et $\frac{135}{169} \in]0,1[$

D'après l'inégalité des accroissements finis, puisque f est dérivable sur l'intervalle $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$:

$$\forall (x,y) \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]^2, \ |f(x) - f(y)| \leqslant C\,|x-y|$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \ |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant C\,|u_n - \alpha|$

ie : $\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_{n+1} - \alpha| \leq C \cdot |u_n - \alpha|$

Par récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n - \alpha| \leqslant C^n \times |u_0 - \alpha|$$

or $|u_0 - \alpha| = |1 - \alpha| = 1 - \alpha \leqslant 1$ car $\alpha \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n - \alpha| \leqslant C^n$

Comme $\lim_{n \to +\infty} c^n = 0$ on a d'après le théorème d'encadrement : $\underline{\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha}$

```
from math import sqrt
def f(x):
    return 1/(x**2 + x + 1)

def limite():
    seuil = 135/169
    n = 0
    u = 1
    while seuil**n > 10**(-3):
        u = f(u)
        n += 1
    return u
```

On trouve $\underline{\alpha \simeq 0,543}$

2.(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note H_n le prédicat :

" $\exists P_n \in \mathbb{R}[X], \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x+x^2)^{n+1}}$ "

Pour $n = 0$ c'est vrai avec $P_0 = 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n est vrai.

On a $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n+1)}(x) = \frac{P_n'(x) \times (1+x+x^2)^{n+1} - (n+1)(2x+1).P_n(x).(1+x+x^2)^n}{(1+x+x^2)^{2n}}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n+1)}(x) = \dfrac{P_n'(x).(1+x+x^2) - (n+1).(2x+1).P_n(x)}{(1+x+x^2)^n}$

Donc H_{n+1} est vrai avec $P_{n+1} = (1+X+X^2).P_n' - (n+1).(2X+1).P_n$

Par récurrence H_n est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.(b) Voir le calcul du 2.(a)

2.(c) On a $P_0 = 1$

$P_1 = -(2X+1)$

$P_2 = 2X^2 + 2X - 1$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on note H_n le prédicat "$\deg P_n = n$"

H_0 est vrai.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n est vrai.

$$P_{n+1} = (1+X+X^2).(n d_n X^{n-1} + \text{termes de degré} \leq n-2)$$
$$- (n+1).(2X+1).(d_n X^n + \text{termes de degré} \leq n-1)$$

$$P_{n+1} = (n d_n - 2 d_n (n+1)) X^{n+1} + \text{termes de degré} \leq n$$

$$P_{n+1} = -(n+2) d_n X^{n+1} + \text{termes de degré} \leq n$$

On a donc $\deg P_{n+1} = n+1$ donc H_{n+1} est vrai.

Par récurrence on a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, H_n est vrai.

De plus $d_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} = -(n+2) d_n$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n = (-1)^n (n+1)!$

3.(a) si f et g sont de classe C^n sur un intervalle I alors $f\times g$ l'est aussi et :

$$\forall x \in I,\ (f\times g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times f^{(k)}(x) \times g^{(n-k)}(x)$$

3.(b) On a $\forall x \in \mathbb{R},\ (1+x+x^2)\times f(x) = 1$

On dérive n fois avec $n \geqslant 2$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times (1+x+x^2)^{(k)} \times f^{(n-k)}(x) = 0$$

$$(1+x+x^2)\times f^{(n)}(x) + n.(2x+1).f^{(n-1)}(x) + n(n-1).f^{(n-2)}(x) = 0$$

donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{P_n(x)}{(1+x+x^2)^n} + n.(2x+1).\dfrac{P_{n-1}(x)}{(1+x+x^2)^n} + n(n-1).\dfrac{P_{n-2}(x)}{(1+x+x^2)^{n-1}} = 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) + n.(2x+1).P_{n-1}(x) + n(n-1)(1+x+x^2)P_{n-2}(x) = 0$

donc $\forall n \geqslant 2,\ \underline{P_n + n.(2X+1).P_{n-1} + n(n-1).(1+X+X^2).P_{n-2} = 0}$

3.(c) D'après 2.(b) : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n(2X+1).P_{n-1} = (1+X+X^2).P'_{n-1} - P_n$

Donc $\forall n \geqslant 2,\ (1+X+X^2).P'_{n-1} + n(n-1).(1+X+X^2).P_{n-2} = 0$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \underline{P'_n = -n(n+1).P_{n-1}}$

4.(a) Soit $n \geqslant 2$.

On suppose que $P_{n-1}(\beta) = P_n(\beta) = 0$

donc $n(n-1).\underbrace{(1+\beta+\beta^2)}_{\neq 0}.P_{n-2}(\beta) = 0$

donc $P_{n-2}(\beta) = 0$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note H_n le prédicat
"P_n et P_{n+1} n'ont pas de racine réelle commune"

H_0 est vrai car P_0 n'a pas de racine.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n est vrai.

Par l'absurde si H_{n+1} est fausse alors d'après ce qui précède P_n, P_{n+1}, P_{n+2} ont une racine commune et donc H_n serait faux.

Donc H_{n+1} est vrai.

Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, H_n est vrai.

4.(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et β une racine réelle de P_n.

Alors $P_n'(\beta) = -(n+1)n.P_{n-1}(\beta) \neq 0$

car on vient de montrer que P_n et P_{n-1} n'ont pas de racine commune.

Donc β est une racine simple de P_n.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, les racines réelles de P_n sont toutes simples.