Correction du DS8

EXERCICE

1.(a) Comme $a-1 \geq 0$ et $b-1 \geq 0$, la fonction $t \mapsto t^{a-1}(1-t)^{b-1}$ est continue sur $[0,1]$. Donc $\beta(a,b)$ est bien définie.

1.(b) $\beta(b,a) = \int_0^1 t^{b-1}.(1-t)^{a-1} dt$

On pose $s = 1-t$. Ce changement de variable est affine donc licite.

$$\beta(b,a) = \int_1^0 (1-s)^{b-1}.s^{a-1}(-ds) = \int_0^1 (1-s)^{b-1}.s^{a-1} ds$$

donc $\beta(b,a) = \beta(a,b)$

1.(c) Si $t \in [0,1]$: $1 = 1-t+t$

donc $t^{a-1}(1-t)^{b-1} = t^{a-1}(1-t)^{b} + t^{a}(1-t)^{b-1}$

Par linéarité de l'intégrale :

$$\beta(a,b) = \beta(a,b+1) + \beta(a+1,b)$$

1.(d) $\beta\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \int_0^1 \sqrt{t(1-t)}\, dt$

On pose $t = \cos^2\theta$. Ce changement de variable est C^1 sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ donc licite.

θ	t
$\frac{\pi}{2}$	0
0	1

Donc $\beta\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{\cos^2\theta.(1-\cos^2\theta)}\,(-2\sin\theta.\cos\theta\, d\theta)$

Or $1-\cos^2\theta = \sin^2\theta$ et si $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on a :
$\sin\theta \geq 0$ et $\cos\theta \geq 0$.

Donc $\beta\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \times \cos^2\theta \, d\theta = 2 \cdot \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right)^2 d\theta$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(4\theta)}{2} d\theta = \frac{1}{4}\left[\theta - \frac{1}{4}\sin(4\theta)\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 0 - \frac{1}{4}\sin(2\pi) + \frac{1}{4} \cdot \sin 0\right)$$

Donc $\underline{\beta\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{8}}$

<u>1.(e)</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\beta(1,n) = \int_0^1 (1-t)^{n-1} dt \overset{1(b)}{=} \beta(n,1) = \int_0^1 t^{n-1} dt = \left[\frac{t^n}{n}\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{n}}$$

<u>2.(a)</u> $\beta(a+1,b) = \int_0^1 \underbrace{t^a}_{u(t)} \cdot \underbrace{(1-t)^{b-1}}_{v'(t)} dt \underset{\text{IPP car } u, v\ C^1 \text{ sur } [0,1]}{=} \left[t^a \cdot \frac{-(1-t)^b}{b}\right]_0^1 - \int_0^1 a t^{a-1} \cdot \frac{-(1-t)^b}{b} dt$

Donc $\beta(a+1,b) = 0 - 0 + \frac{a}{b}\int_0^1 t^{a-1} \cdot (1-t)^b dt = \frac{a}{b} \cdot \beta(a, b+1)$

$$\underset{1.(c)}{=} \frac{a}{b} \times \left(\beta(a,b) - \beta(a+1,b)\right)$$

Donc $\left(1+\frac{a}{b}\right) \cdot \beta(a+1,b) = \frac{a}{b} \cdot \beta(a,b)$

Donc $\beta(a+1,b) = \dfrac{a}{a+b} \cdot \beta(a,b)$

2.(b) On a donc $\beta(n+1,p) = \dfrac{n}{n+p} \times \beta(n,p)$

et donc $\beta(n,p) = \dfrac{n-1}{n+p-1} \times \dfrac{n-2}{n+p-2} \times \dots \times \dfrac{1}{1+p} \times \beta(1,p)$

$$= \frac{(n-1)! \times p!}{(n+p-1)!} \times \frac{1}{p} \quad \text{donc} \quad \beta(n,p) = \frac{(n-1)! \times (p-1)!}{(n+p-1)!}$$

2.(c) D'après 1.(d) on a $\beta\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{8}$

Donc $\beta\left(n+\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right) = \dfrac{n-\frac{1}{2}}{n+1} \times \dfrac{n-\frac{3}{2}}{n} \times \dots \times \dfrac{\frac{3}{2}}{3} \times \beta\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$

$$= \frac{(2n-1)(2n-3)\times\dots\times 3}{2^{n-1} \times \frac{(n+1)!}{2}} \times \frac{\pi}{8}$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{n-1} \times \frac{(n+1)!}{2} \times 2^n \times n!} \times \frac{\pi}{8} = \frac{(2n)!}{n! \times (n+1)! \times 2^{2n+1}} \times \pi$$

Puis $\beta\left(n+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2}\right) \overset{1.(b)}{=} \beta\left(p+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}\right) =$

$$= \frac{p-\frac{1}{2}}{n+p} \times \frac{p-\frac{3}{2}}{n+p-1} \times \dots \times \frac{\frac{3}{2}}{n+2} \times \beta\left(\frac{3}{2},n+\frac{1}{2}\right)$$

Donc :

$$\beta\left(n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}\right) \overset{1.(b)}{=} \frac{(2p)!}{2^{p-1} \times 2^{p} \times p!} \times \frac{(n+1)!}{(n+p)!} \times \beta\left(n+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Finalement : $$\beta\left(n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2p)! \times (2n)!}{n! \times p! \times (n+p)! \times 2^{2(n+p)}} \times \pi$$

3.(a) Comme h' est supposée continue sur le segment $[x, y]$ donc M_1 est bien défini.

Par IPP : $$\int_x^y h'(t) \times (y-t)\,dt = \Big[h(t) \times (y-t)\Big]_x^y - \int_x^y h(t) \times (-1)\,dt$$

$$= 0 - h(x) \times (y-x) + \int_x^y h(t)\,dt$$

donc $$\int_x^y h(t)\,dt = h(x) \times (y-x) + \int_x^y h'(t) \times (y-t)\,dt$$

Donc : $$\left| \int_x^y h(t)\,dt - (y-x) \cdot h(x) \right| = \left| \int_x^y h'(t) \times (y-t)\,dt \right|$$

$$\leq \int_x^y |h'(t)| \times |y-t|\,dt = \int_x^y |h'(t)| \cdot (y-t)\,dt$$

or $\forall t \in [x, y]$, $|h'(t)| \times (y-t) \leq M_1 \cdot (y-t)$

donc $$\int_x^y |h'(t)| \cdot (y-t)\,dt \leq M_1 \cdot \int_x^y (y-t)\,dt = M_1 \cdot \frac{(y-x)^2}{2}$$

Donc :

$$\left| \int_x^y h(t)\,dt - (y-x).h(x) \right| \leq M_1 . \frac{(y-x)^2}{2}$$

<u>3.(b)</u> Comme $a-1 \geq 1$ et $b \geq 1$ les fonctions $t \mapsto t^{a-1}$ et $t \mapsto (1-t)^{b-1}$ sont C^1 sur $[0,1]$.

Donc $t \xrightarrow{h} t^{a-1} \times (1-t)^{b-1}$ est C^1 sur $[0,1]$ d'après les th généraux.

On a $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\left| \int_{k/n}^{\frac{k+1}{n}} h(t)\,dt - \frac{1}{n} h\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq M_1(k) \times \frac{1}{2n^2}$

où $M_1(k) = \max\limits_{\frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}} |h'(t)| = \max\limits_{\frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}} \left| (a-1) t^{a-2} . (1-t)^{b-1} - (b-1) t^{a-1} . (1-t)^{b-2} \right|$

$$\leq a+b-2$$

car si $t \in [0,1]$ alors $|t| \leq 1$ et $|1-t| \leq 1$

Donc $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\left| \int_{k/n}^{\frac{k+1}{n}} h(t)\,dt - \frac{1}{n} . h\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{a+b-2}{2n^2}$

Comme $\beta(a,b) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{\frac{k+1}{n}} h(t)\,dt$ d'après Chasles

On a : $\left| \beta(a,b) - u_n \right| = \left| \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(\int_{k/n}^{\frac{k+1}{n}} h(t)\,dt - \frac{1}{n} h\left(\frac{k}{n}\right) \right) \right|$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} h(t)\,dt - \frac{1}{n} . h\left(\frac{k}{n}\right) \right|$$

Donc : $\left|\beta(a,b) - u_n\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a+b-2}{2n^2} = \frac{a+b-2}{2n}$

---

3. (c)

```
def h(a,b,t):
    return t**(a-1)*(1-t)**(b-1)

def u(a,b,n):
    s=0
    for k in range(n):
        s+=(1/n)*h(a,b,k/n)
    return s

def beta(a,b):
    n=1
    while (a+b-2)/(2*n)>10**(-3):
        n+=1
    return u(a,b,n)
```

PROBLEME

Partie I

1.(a) Soit $y \in Im(u^2)$. Alors $\exists x \in E$; $y = u^2(x) = u(u(x))$

Si on pose $t = u(x)$ on a $t \in E$ et $y = u(t)$. Donc $y \in Im(u)$.

Ceci prouve que $Im(u^2) \subseteq Im(u)$.

1.(b) Soit $x \in Ker(u)$. On a donc $u(x) = 0_E$.

Donc $u(u(x)) = u(0_E) = 0_E$ car u est linéaire.

Donc $x \in Ker(u^2)$. Ceci prouve que $Ker(u) \subseteq Ker(u^2)$

2. On note (i), (ii), (iii) les trois propriétés.

$\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ On suppose que $E = Ker(u) \oplus Im(u)$.

Soit $y \in Im(u)$. Alors $\exists x \in E$, $y = u(x)$

Comme $E = Ker(u) \oplus Im(u)$ on a $x = a + b$ avec $a \in Ker(u)$ et $b \in Im(u)$

Donc $y = u(a) + u(b) = u(b)$ car $a \in Ker(u)$

Or $b \in Im(u)$ donc $\exists t \in E$, $b = u(t)$.

Donc $y = u(u(t)) \in Im(u^2)$.

Ceci prouve que $Im(u) \subseteq Im(u^2)$.

D'après 1.(a) on en déduit que $Im(u) = Im(u^2)$

$\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$ On suppose que $Im(u) = Im(u^2)$. Donc $rg(u) = rg(u^2)$

On applique le théorème du rang aux endomorphismes u et u^2 :

$$\dim(E) = rg(u) + \dim(Ker(u))$$
$$= rg(u^2) + \dim(Ker(u^2))$$

On a donc $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(\mathrm{Ker}(u^2))$

Comme $\mathrm{Ker}(u) \subseteq \mathrm{Ker}(u^2)$ on a $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$.

$\boxed{(iii) \Rightarrow (i)}$ On suppose que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$.

Soit $y \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$.

On sait donc que $u(y) = 0_E$ et $\exists x \in E,\ y = u(x)$.

On a donc $u^2(x) = 0_E$, donc $x \in \mathrm{Ker}(u^2)$.

Comme $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Ker}(u)$ on a $x \in \mathrm{Ker}(u)$.

Donc $y = u(x) = 0_E$.

Ceci prouve que $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) \subseteq \{0_E\}$.

Comme $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont des sev de E on a :

$$\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0_E\}.$$

Mais d'après le théorème du rang :

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u))$$

On en déduit que :

$$E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$$

<u>3. (a)</u> On note (i) et (ii) les deux propriétés.

D'après la question précédente on a $(ii) \Rightarrow (i)$.

Montrons que $(i) \Rightarrow (ii)$.

On suppose que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$.

Soit $x \in E$ fixé qcq. On a $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$ donc $u(x) \in \mathrm{Im}(u^2)$.

Donc $\exists t \in E,\ u(x) = u^2(t)$.

Donc $u(x - u(t)) = u(x) - u^2(t) = 0_E$ et donc $x - u(t) \in \mathrm{Ker}(u)$

Comme $u(t) \in \mathrm{Im}(u)$ et $x = x - u(t) + u(t)$ on en déduit que $x \in \operatorname{Ker}(u) + \operatorname{Im}(u)$.

Ceci prouve que $E \subseteq \operatorname{Ker}(u) + \operatorname{Im}(u)$.

Comme $\operatorname{Ker}(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$ sont des sev de E on a donc :

$$E = \operatorname{Ker}(u) + \operatorname{Im}(u)$$

3. (b) On note (i) et (ii) les deux propriétés.

D'après 2. on sait que $(i) \Rightarrow (ii)$.

Montrons que $(ii) \Rightarrow (i)$.

On suppose que $\operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0_E\}$.

Soit $x \in \operatorname{Ker}(u^2)$. On a donc $u(u(x)) = 0_E$.

Donc $u(x) \in \operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Im}(u)$.

Donc $u(x) = 0_E$ donc $x \in \operatorname{Ker}(u)$.

Ceci prouve que $\operatorname{Ker}(u^2) \subseteq \operatorname{Ker}(u)$.

D'après 1.(b) on a donc $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(u^2)$.

3 (c) Il suffit de regrouper 3.(a) avec 3.(b).

Partie II

1. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $w = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$.

$$u(\alpha v + w) = u(\alpha x + x', \alpha y + y', \alpha z + z')$$

$$= (4\alpha x + 4x' - \alpha y - y' + 5\alpha z + 5z', -2\alpha x - 2x' - \alpha y - y' - \alpha z - z', -4\alpha x - 4x' + \alpha y + y' - 5\alpha z - 5z')$$

$$= \alpha.(4x - y + 5z, -2x - y - z, -4x + y - 5z) + (4x' - y' + 5z', -2x' - y' - z', -4x' + y' - 5z')$$

donc $u(\alpha.v+w)=\alpha.u(v)+u(w)$

Donc u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

On a : $v\in Ker(u) \iff \begin{cases} 4x-y+5z=0 \\ -2x-y-z=0 \\ -4x+y-5z=0 \end{cases}$

$\underset{L_3\leftarrow L_3+L_1}{\iff} \begin{cases} 4x-y+5z=0 \\ -2x-y-z=0 \\ 0=0 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow 2L_2+L_1}{\iff} \begin{cases} \boxed{4x}-y+5z=0 \\ \boxed{-3y}+3z=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x=-z \\ y=z \\ z \text{ qcq ds } \mathbb{R} \end{cases}$

Donc $Ker(u)$ est la droite vectorielle engendrée par $(1,-1,-1)$

Et $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $u(x,y,z)=x.(4,-2,-4)+y.(-1,-1,1)+z.(5,-1,-5)$

Donc $Im(u)=Vect(\underset{a}{(4,-2,-4)},\underset{b}{(-1,-1,1)},\underset{c}{(5,-1,-5)})$

On voit que $c=a-b$

Donc $Im(u)=Vect(a,b)$ Comme a et b sont non colinéaires on en déduit que (a,b) est une base de $Im(u)$.

On a $b\in Ker(u)\cap Im(u)$ donc $Ker(u)\cap Im(u)\neq\{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Donc la propriété $E=Ker(u)\oplus Im(u)$ est fausse.

3. Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$u^2(x,y,z) = u(4x-y+5z, -2x-y-z, -4x+y-5z)$$

$$= (16x-4y+20z+2x+y+z-20x+5y-25z,$$
$$-8x+2y-10z+2x+y+z+4x-y+5z,$$
$$-16x+4y-20z-2x-y-z+20x-5y+25z)$$

$$= (-2x+2y-4z, -2x+2y-4z, 2x-2y+4z)$$

Pour $v=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$v \in \mathrm{Ker}(u^2) \iff x-y+2z=0$$
$$\iff \begin{cases} x = y-2z \\ y,z \text{ qcq ds } \mathbb{R} \end{cases}$$

donc $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Vect}((1,1,0), (-2,0,1))$

Comme $(1,1,0)$ et $(-2,0,1)$ sont non colinéaires on en déduit que $((1,1,0), (-2,0,1))$ est une base de $\mathrm{Ker}(u^2)$.

$$\mathrm{Im}(u^2) = \mathrm{Vect}((-2,-2,2), (2,2,-2), (-4,-4,4))$$
$$= \mathrm{Vect}((1,1,-1))$$

donc $\mathrm{Im}(u^2)$ est la droite vectorielle engendrée par $(1,1,-1)$

Soit $v \in \mathrm{Ker}(u^2) \cap \mathrm{Im}(u^2)$.

Comme $v \in \mathrm{Im}(u^2)$ on a $v = (\alpha, \alpha, -\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Mais $v \in Ker(u^2)$ donne alors : $\alpha - \alpha - 2\alpha = 0$

ie $\alpha = 0$

donc $v = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Donc $Ker(u^2) \cap Im(u^2) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Le th du rang donne alors : $\underline{\mathbb{R}^3 = Ker(u^2) \oplus Im(u^2)}$

Partie III

1(a) C'est un résultat du cours puisque u^k est un endomorphisme de $\mathbb{E}$

1.(b) Soit $x \in Ker(u^k)$. On a donc $u^k(x) = 0_E$.

De plus $u^k(u^n(x)) = u^{k+n}(x) = u^{n+k}(x) = u^n(u^k(x))$
$= u^n(0_E) = 0_E$ car u^n est linéaire

Donc $u^n(x) \in Ker(u^k)$.

Donc $\underline{Ker(u^k) \text{ est stable par } u^n}$.

Soit $y \in Im(u^k)$. Alors $\exists x \in \mathbb{E}$, $y = u^k(x)$.

Donc $u^n(y) = u^{n+k}(x) = u^k(u^n(x))$ donc $u^n(y) \in Im(u^k)$

Donc $\underline{Im(u^k) \text{ est stable par } u^n}$.

2.(a) Soit $x \in Ker(u^k)$. Alors $u^k(x) = 0_E$ donc $u^{k+1}(x) = u(u^k(x))$
$= u(0_E) = 0_E$

Donc $x \in Ker(u^{k+1})$. Ceci prouve que $\underline{Ker(u^k) \subseteq Ker(u^{k+1})}$

Soit $y \in \mathrm{Im}(u^{k+1})$. Alors $\exists x \in E,\ y = u^{k+1}(x)$.

Donc $y = u^k(u(x))$ donc $y \in \mathrm{Im}(u^k)$.

Ceci prouve que $\underline{\mathrm{Im}(u^{k+1}) \subseteq \mathrm{Im}(u^k)}$.

2.(b) Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $(v, w) \in C^2$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N},\ v \in \mathrm{Im}(u^k)$ et $w \in \mathrm{Im}(u^k)$

donc $\alpha v + w \in \mathrm{Im}(u^k)$. Donc $\alpha v + w \in C$.

De plus $\forall k \in \mathbb{N},\ 0_E \in \mathrm{Im}(u^k)$.

Donc $0_E \in C$ et donc $C \neq \emptyset$.

Ceci prouve que <u>C est un sev de E</u>

Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $(v, w) \in N^2$.

Alors $\exists k_1 \in \mathbb{N},\ v \in \mathrm{Ker}(u^{k_1})$

et $\exists k_2 \in \mathbb{N},\ w \in \mathrm{Ker}(u^{k_2})$

Si on pose $k_* = \max(k_1, k_2)$ alors d'après la question précédente on a $v \in \mathrm{Ker}(u^{k_*})$

$w \in \mathrm{Ker}(u^{k_*})$

donc $\alpha . v + w \in \mathrm{Ker}(u^{k_*})$

Et donc $\alpha . v + w \in N$.

De plus $0_E \in \mathrm{Ker}(u)$ donc $0_E \in N$.

Ceci prouve que <u>N est un sev de E</u>.

Soit $x \in C$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathrm{Im}(u^k)$

donc $u(x) \in \mathrm{Im}(u^k)$ puisque $\mathrm{Im}(u^k)$ est u-stable

Donc $u(x) \in C$. Donc <u>C est stable par u</u>

Soit $x \in N$.

Alors $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, $x \in \mathrm{Ker}(u^{k_0})$

donc $u(x) \in \mathrm{Ker}(u^{k_0})$ puisque $\mathrm{Ker}(u^k)$ est stable par u.

Donc $u(x) \in N$. Donc <u>N est stable par u</u>.

<u>2.(c)</u> $\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose u surjectif.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, u^k est surjectif (composée de surjections).

Donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(u^k) = E$

Donc $\forall x \in E$, $x \in C$. Donc $E \subseteq C$.

Comme C est un sev de E : <u>$C = E$</u>.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $C = E$.

Soit $y \in E$. Alors $y \in C$

donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $y \in \mathrm{Im}(u^k)$.

En particulier : $y \in \mathrm{Im}(u)$. Donc $E \subseteq \mathrm{Im}(u)$.

Comme $\mathrm{Im}(u)$ est un sev de E : $E = \mathrm{Im}(u)$.

Donc <u>u est surjectif</u>

2. (d) $\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que u est injectif.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, u^k est injectif.

Donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}(u^k) = \{0_E\}$.

Si on se donne $x \in N$ on a donc $\exists k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathrm{Ker}(u^k)$

donc $x \in \{0_E\}$.

Donc $N \subseteq \{0_E\}$. Comme N est un sev de E : $\underline{N = \{0_E\}}$

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $N = \{0_E\}$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$. Alors $x \in N$ donc $x \in \{0_E\}$.

Donc $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$: $\underline{u \text{ est injectif}}$.

3. (a) On procède par récurrence sur n.

C'est trivial si $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel $\mathrm{Im}(u^{k+n}) = \mathrm{Im}(u^k)$.

D'après 2.(a) : $\mathrm{Im}(u^{k+n+1}) \subseteq \mathrm{Im}(u^{k+n})$

Soit $y \in \mathrm{Im}(u^{k+n})$. Alors $\exists x \in E$, $y = u^{k+n}(x)$.

On a $u^k(x) \in \mathrm{Im}(u^k)$.

Mais $\mathrm{Im}(u^k) = \mathrm{Im}(u^{k+1})$. Donc $u^k(x) \in \mathrm{Im}(u^{k+1})$

donc $\exists t \in E$, $u^k(x) = u^{k+1}(t)$

Donc $y = u^{k+n}(x) = u^n(u^k(x)) = u^n(u^{k+1}(t)) = u^{n+k+1}(t)$

donc $y \in \mathrm{Im}(u^{k+n+1})$

Ceci prouve que $\mathrm{Im}(u^{k+n}) \subseteq \mathrm{Im}(u^{k+n+1})$.

Donc par double-inclusion : $\mathrm{Im}(u^{k+n}) = \mathrm{Im}(u^{k+n+1})$

Comme $\mathrm{Im}(u^k) = \mathrm{Im}(u^{k+n})$ on a $\mathrm{Im}(u^k) = \mathrm{Im}(u^{k+n+1})$

Par récurrence on a donc montré que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathrm{Im}(u^{k+n}) = \mathrm{Im}(u^k)$$

3.(b).i. $\boxed{\subseteq}$ Soit $y \in C$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}, \ y \in \mathrm{Im}(u^k)$

donc $y \in \mathrm{Im}(u^r)$.

$\boxed{\supseteq}$ Soit $y \in \mathrm{Im}(u^r)$.

D'après 3.(a) : $\forall k \in \mathbb{N}, \ k \geqslant r \Rightarrow \mathrm{Im}(u^k) = \mathrm{Im}(u^r)$

Et donc $\forall k \in \mathbb{N}, \ k \geqslant r \Rightarrow y \in \mathrm{Im}(u^k)$

De plus d'après 2.(a) :

$$\mathrm{Im}(u^r) \subseteq \mathrm{Im}(u^{r-1}) \subseteq \dots \subseteq \mathrm{Im}(u) \subseteq \mathrm{Im}(u^0)$$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}, \ k \leq r \Rightarrow y \in \mathrm{Im}(u^k)$.

Finalement : $\forall k \in \mathbb{N}, \ y \in \mathrm{Im}(u^k)$.

Et donc $y \in C$.

Par double-inclusion : $C = \mathrm{Im}(u^r)$

3.(b).ii. D'après 2.(b) on sait que $u(C) \subseteq C$.

Réciproquement, soit $y \in C$.

Alors $y \in \mathrm{Im}(u^r)$

donc $y \in \mathrm{Im}(u^{r+1})$ donc $\exists x \in E,\ y = u^{r+1}(x)$

Donc $y = u(u^r(x))$. Comme $u^r(x) \in \mathrm{Im}(u^r)$

on a $u^r(x) \in C$ et donc $y \in u(C)$.

Finalement $\underline{u(C) = C}$

3.(b).iii D'après les préliminaires il suffit de montrer que $\mathrm{Im}(u^r) = \mathrm{Im}(u^{2r})$. C'est une conséquence immédiate de 3.(a).

Donc $\underline{E = \mathrm{Ker}(u^r) + \mathrm{Im}(u^r)}$.

4.(a) On procède par récurrence.

C'est trivial si $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel $\mathrm{Ker}(u^{k+n}) = \mathrm{Ker}(u^k)$

D'après 2.(a) on a $\mathrm{Ker}(u^{k+n}) \subseteq \mathrm{Ker}(u^{k+n+1})$.

Si $x \in \mathrm{Ker}(u^{k+n+1})$ alors $u^n(x) \in \mathrm{Ker}(u^{k+1})$.

Mais $\mathrm{Ker}(u^{k+1}) = \mathrm{Ker}(u^k)$ donc $u^n(x) \in \mathrm{Ker}(u^k)$

et donc $u^{n+k}(x) = 0_E$. Ainsi $x \in \mathrm{Ker}(u^{n+k})$.

Ceci prouve que $\mathrm{Ker}(u^{n+k}) = \mathrm{Ker}(u^{n+k+1})$.

Or $\mathrm{Ker}(u^{n+k}) = \mathrm{Ker}(u^k)$ donc $\mathrm{Ker}(u^{n+k+1}) = \mathrm{Ker}(u^k)$.

Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underline{\mathrm{Ker}(u^{n+k}) = \mathrm{Ker}(u^k)}$

4.(b).i : Si $x \in \mathrm{Ker}(u^s)$ alors $x \in N$.

Donc $\mathrm{Ker}(u^s) \subseteq N$.

Réciproquement si $x \in N$.

Alors $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, $x \in \mathrm{Ker}(u^{k_0})$

Cas 1 : $k_0 \geqslant s$. D'après 4.(a) on a $\mathrm{Ker}(u^{k_0}) = \mathrm{Ker}(u^s)$

donc $x \in \mathrm{Ker}(u^s)$.

Cas 2 : $k_0 < s$. D'après 2.(a) : $\mathrm{Ker}(u^{k_0}) \subseteq \mathrm{Ker}(u^s)$

donc $x \in \mathrm{Ker}(u^s)$.

Dans tous les cas $x \in \mathrm{Ker}(u^s)$.

Ceci prouve que $N \subseteq \mathrm{Ker}(u^s)$.

Par double-inclusion $\underline{N = \mathrm{Ker}(u^s)}$.

4.(b).ii : D'après les préliminaires il suffit de montrer que $\mathrm{Ker}(u^s) = \mathrm{Ker}(u^{2s})$. C'est une conséquence immédiate de 4.(a).

On a donc $\mathrm{Ker}(u^s) \cap \mathrm{Im}(u^s) = \{0_E\}$.