Correction du DS8 *

1. si $f \in C^0(\mathbb{R})$ et si on pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ alors $F \in C^1(\mathbb{R})$ d'après le théorème fondamental de l'analyse.

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi f(x) = F(x) - F(x-1)$

D'après les théorèmes généraux : $\phi f \in C^1(\mathbb{R})$ donc $\phi f \in C^0(\mathbb{R})$

Ainsi ϕ va de $C^0(\mathbb{R})$ dans $C^0(\mathbb{R})$.

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(f,g) \in (C^0(\mathbb{R}))^2$ alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \phi(\alpha f+g)(x) = \int_{x-1}^{x} (\alpha . f(t) + g(t))dt = \alpha . \int_{x-1}^{x} f(t)dt + \int_{x-1}^{x} g(t)dt$$

$$= \alpha . \phi f(x) + \phi g(x)$$

Donc $\phi(\alpha f+g) = \alpha . \phi f + \phi g$. Donc ϕ est linéaire.

Ceci prouve que ϕ est un endomorphisme de $C^0(\mathbb{R})$.

2. (a) Le changement de variable affine $t = x+u-1$ donne :

$$\phi f(x) = \int_0^1 f(x+u-1)du$$

2. (b) Pour $x \in \mathbb{R}$, $\phi f(-x) = \int_0^1 f(-x+u-1)du$

Si f est paire alors : $\phi f(-x) = \int_0^1 f(x-u+1)du \overset{t=1-u}{=} \int_1^0 f(x+t) \times (-dt)$

$$= \int_0^1 f(x+t)dt = \phi f(x+1)$$

Si f impaire alors $\phi f(-x) = -\phi f(x+1)$.

2.(c) On suppose f croissante sur $\mathbb{R}$.

Soient $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tq $x_1 < x_2$.

On a $\forall u \in [0,1]$, $x_1 + u - 1 < x_2 + u - 1$

donc $f(x_1 + u - 1) \leq f(x_2 + u - 1)$

Par croissance de l'intégrale : $\int_0^1 f(x_1 + u - 1)\,du \leq \int_0^1 f(x_2 + u - 1)\,du$

ie $\phi_f(x_1) \leq \phi_f(x_2)$

Donc : f croissante sur $\mathbb{R} \Rightarrow \phi_f$ croissante sur $\mathbb{R}$

De même : f décroissante sur $\mathbb{R} \Longrightarrow \phi_f$ décroissante sur $\mathbb{R}$

2.(d) Si $L = +\infty$:

$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \geq B, f(x) \geq A$.

Soit $A \in \mathbb{R}$ fixé qcq.

$\forall x \geq B+1, \forall u \in [0,1]$, $x + u - 1 \geq x - 1 \geq B$

donc $f(x + u - 1) \geq A$

donc $\int_0^1 f(x + u - 1)\,du \geq \int_0^1 A\,du = A$

ie $\forall x \geq B+1$, $\phi_f(x) \geq A$.

Donc $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B' \in \mathbb{R}, \forall x \geq B', \phi_f(x) \geq A$

ie $\lim\limits_{x \to +\infty} \phi_f(x) = +\infty$

De même si $L = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \phi f(x) = -\infty$

Si $L \in \mathbb{R}$ alors :

$\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \geq B, L - \varepsilon \leq f(x) \leq L + \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé qcq.

$\forall x \geq B+1, \forall u \in [0,1], \quad x + u - 1 \geq B$

donc $L - \varepsilon \leq f(x+u-1) \leq L + \varepsilon$

donc $\int_0^1 (L-\varepsilon)du \leq \int_0^1 f(x+u-1)du \leq \int_0^1 (L+\varepsilon)du$

ie $L - \varepsilon \leq \phi f(x) \leq L + \varepsilon$

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists B' \in \mathbb{R}, \forall x \geq B', L - \varepsilon \leq \phi f(x) \leq L + \varepsilon$

ie $\lim\limits_{x \to +\infty} \phi f(x) = L$

On procède de même si $x \to -\infty$ en posant $B' = B$.

3.(a) Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on le note $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \phi P(x) = \int_{x-1}^{x} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k t^k\right) dt = \sum_{k=0}^{n} a_k \times \int_{x-1}^{x} t^k dt$

$= \sum_{k=0}^{n} a_k \times \frac{x^{k+1} - (x-1)^{k+1}}{k+1} = \frac{a_n}{n+1}\left(x^{n+1} - (x-1)^{n+1}\right) +$ termes de deg $\leq n$

Or $(x-1)^{n+1} = x^{n+1} +$ termes de deg $\leq n$.

On en déduit que $\Phi P \in \mathbb{R}_n[X]$.

Donc $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Φ.

3.(b) Soit $P \in \mathrm{Ker}\, \Phi_n$.

Si $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ on le note $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $d = \deg P$ et donc $a_d \neq 0$

Le calcul précédent donne que :

$$\Phi_n P = \frac{a_d}{\cancel{d+1}} \cancel{(d+1)} X^d + \text{termes de deg} \leq d-1$$

donc $\deg \Phi_n P = d$ et donc $\Phi_n P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$.

Ceci prouve que $\mathrm{Ker}(\Phi_n) = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$.

Donc Φ_n est injectif.

Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, on en déduit que

Φ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3.(c) Si $\Phi P = \lambda P$ et $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ on reprend le calcul précédent :

$$a_d X^d + \text{termes de deg} \leq d-1 = \lambda a_d X^d + \text{termes de deg} \leq d-1$$

Par unicité des coefficients : $a_d = \lambda a_d$

et comme $a_d \neq 0$: $\lambda = 1$.

4.(a) On a vu à la question 1. que si $f \in C^0(\mathbb{R})$ alors $\phi f \in C^1(\mathbb{R})$.

En reprenant les notations de 1., si $f \in C^k(\mathbb{R})$ alors $F \in C^{k+1}(\mathbb{R})$ et donc $\phi f \in C^{k+1}(\mathbb{R})$.

Ainsi $\forall j \in \mathbb{N},\ j \leqslant k+1 \Longrightarrow \phi f \in C^j(\mathbb{R})$

Si $f \in C^k(\mathbb{R})$ mais $f \notin C^{k+1}(\mathbb{R})$ (il existe de telles fonctions) alors $F \in C^{k+1}(\mathbb{R})$ et $F \notin C^{k+2}(\mathbb{R})$.

Ceci prouve que $\phi f \notin C^{k+2}(\mathbb{R})$.

Donc $\phi(C^k(\mathbb{R})) \not\subset C^{k+2}(\mathbb{R})$

donc $\forall j \in \mathbb{N},\ j \geqslant k+2 \longrightarrow \phi(C^k(\mathbb{R})) \not\subset C^j(\mathbb{R})$

4.(b) Soit $f \in \mathrm{Ker}(\phi)$.

On a donc f continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \int_{x-1}^{x} f(t)\,dt = 0$.

En particulier $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$.

De plus si on pose $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ alors $F \in C^1(\mathbb{R})$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = f(x)$.

On a $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) - F(x-1) = 0$

En dérivant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - f(x-1) = 0$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x)$

Réciproquement : soit f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x)$ et $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$.

On note encore $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

D'après les théorèmes généraux $\phi f \in C^1(\mathbb{R})$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\phi f)'(x) = f(x) - f(x-1) = 0$$

donc ϕf est constante sur $\mathbb{R}$.

Or $\phi f(1) = \int_0^1 f(t)\,dt = 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \phi f(x) = 0$.

Donc $f \in \mathrm{Ker}(\phi)$.

Conclusion : $\boxed{\mathrm{Ker}(\phi) = \left\{ f \in C^0(\mathbb{R}),\ f \text{ 1-périodique et } \int_0^1 f(t)\,dt = 0 \right\}}$

4.(c) $\mathrm{Ker}(\phi) \neq \{0\}$ donc ϕ n'est pas injectif.

$\mathrm{Im}(\phi) \subseteq C^1(\mathbb{R}) \not\subseteq C^0(\mathbb{R})$ donc ϕ n'est pas surjectif.

5.(a) $\phi f = \lambda . f$ donne $\forall x \in \mathbb{R},\ \int_{x-1}^x f(t)\,dt = \lambda . f(x)$.

donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\lambda} \times \left(F(x) - F(x-1)\right)$

où F est définie comme précédemment.

Par récurrence montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n(\mathbb{R})$.

c'est vrai pour $n=0$.

Supposons que $n \in \mathbb{N}$ est tel que $f \in C^n(\mathbb{R})$.

On sait que $F \in C^1(\mathbb{R})$ et $f = F'$.

On en déduit que $F \in C^{n+1}(\mathbb{R})$

Mais comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{d}\cdot\left(F(x) - F(x-1)\right)$

on sait d'après les théorèmes généraux que $f \in C^{n+1}(\mathbb{R})$.

Par récurrence on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n(\mathbb{R})$.

Donc $\boxed{f \in C^\infty(\mathbb{R})}$

5. (b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tq $\phi P = P$

Supposons $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$. On le note $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ où $d = \deg P$, $a_d \neq 0$.

$$\phi(P) = P \Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{d} a_k \frac{X^{k+1} - (X-1)^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{d} a_k \cdot \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} \frac{(-1)^{k-j}}{k+1} X^j = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{j=0}^{d} \left(\sum_{k=j}^{d} \binom{k+1}{j} \frac{(-1)^{k-j}}{k+1} a_k \right) X^j = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$$

$$\Longleftrightarrow \forall j \in [\![0,d]\!], \quad a_j = \sum_{k=j}^{d} (-1)^{k-j} \times \binom{k+1}{j} \frac{a_k}{k+1}$$

En particulier : $a_d = (-1)^0 \times \binom{d+1}{d} \frac{a_d}{d+1}$ donc $a_d = a_d$

et : $a_{d-1} = \sum_{k=d-1}^{d} (-1)^{k+1-d} \times \binom{k+1}{d-1} \frac{a_k}{k+1} = d\, \frac{a_{d-1}}{d} - \binom{d+1}{d-1} \times \frac{a_d}{d+1}$

ie $a_{d-1} = a_{d-1} - \frac{d}{2} a_d$

Comme $a_d \neq 0$ on en déduit que $d = 0$.

Donc P est un polynôme constant non nul.

Or il est clair que tous les polynômes constants vérifient $\Phi P = P$ (y compris le polynôme nul).

On a donc :

$$\boxed{\{P \in \mathbb{R}[X],\ \Phi P = P\} = \mathbb{R}_0[X]}$$

5.(c) Si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{ax}$ et $\Phi f = \lambda f$ on a :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_{x-1}^{x} e^{at}\, dt = \lambda e^{ax}$. Si $a = 0$: $\lambda = 1$. On suppose $a \neq 0$.

On dérive :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{ax} - e^{a(x-1)} = \lambda a e^{ax}$

donc $1 - e^{-a} = \lambda a$

Etudions la fonction $u : t \mapsto 1 - e^{-t} - \lambda t$

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $u'(t) = e^{-t} - \lambda$

t	$-\infty$		$\ln(1/\alpha)$		$+\infty$
u	$-\infty$	$\nearrow$	$1-\alpha+\alpha\ln\alpha$	$\searrow$	$-\infty$

On montre facilement que si $\alpha \neq 1$ alors : $1-\alpha+\alpha\ln\alpha > 0$

donc il existe deux $a \in \mathbb{R}$ tq $1-e^{-a} = \alpha a$ notés

$a_1 = 0$ ou $a_2 \neq 0$.

Mais si $a = 0$ on a $\alpha = 1$. Or $\alpha \neq 1$ donc $a \neq 0$.

Et si $1-e^{-a} = \alpha a$ on vérifie facilement que $\phi f = \alpha f$.

* Donc si $\alpha \neq 1$: $\exists!\, a \in \mathbb{R}$ tq $\phi f = \alpha f$ (et $a \neq 0$).

* Si $\alpha = 1$: $1-e^{-a} = a$ donne $a = 0$ donc $f = 1$.

et $\phi 1 = 1$.

Finalement : $\underline{\exists!\, a \in \mathbb{R} \text{ tq } \phi f = \alpha f}$.

5.(d) Si f est bornée on pose $M = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\forall t \in [x-1, x]$, $|f(t)| \leq M$

donc $|\phi f(x)| \leq \int_{x-1}^{x} |f(t)|\,dt \leq \int_{x-1}^{x} M\,dt = M$

Mais $\phi f = \alpha f$ donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\alpha| . |f(x)| \leq M$

Et donc : $|\alpha| . M \leq M$ car M + petit majorant de $|f(x)|$

Donc $|\alpha| \leq 1$ ou $M = 0$.

Comme $\alpha > 1$ on a $M = 0$.

Donc $f = 0$.

PROBLEME

Partie I

1. On note $d = \deg(P)$ et $\alpha = \mathrm{cd}(P)$.

Alors $P = \alpha X^d + \beta X^{d-1} +$ termes de degré $\leq d-1$ où $\beta \in \mathbb{R}$

donc $P(X+1) = \alpha (X+1)^d + \beta (X+1)^{d-1} +$ termes de degré $\leq d-2$

$= \alpha X^d + d\alpha X^{d-1} + \beta X^{d-1} +$ termes de degré $\leq d-2$

Donc $\delta(P) = d\alpha X^{d-1} +$ termes de degré $\leq d-2$

Donc $\boxed{\deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1}$ et $\boxed{\mathrm{cd}(\delta(P)) = \mathrm{cd}(P) \times \deg(P)}$

2. Donc si P non constant alors $\delta(P) \neq 0$ et donc $P \notin \mathrm{Ker}(\delta)$.

Par contraposée : $\mathrm{Ker}(\delta) \subseteq \mathbb{R}_0[X]$. L'inclusion réciproque est évidente. Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(\delta) = \mathbb{R}_0[X]}$

De plus $\deg(\delta(P)) \leq n-1$ si $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

Donc $\mathrm{Im}(\delta) \subseteq \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Mais d'après le théorème du rang :

$\dim(\mathbb{R}_n[X]) = \dim(\mathrm{Ker}\,\delta) + \dim(\mathrm{Im}\,\delta)$

Donc : $\dim(\mathrm{Im}\,\delta) = n+1-1 = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$

Donc $\boxed{\mathrm{Im}(\delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]}$

3. Par récurrence immédiate si $\deg P \geq j$ alors :

$$\deg(\delta^j(P)) = \deg P - j \quad \text{et donc } \delta^j(P) \neq 0$$

Donc $\operatorname{Ker}(\delta^j) \subseteq \mathbb{R}_{j-1}[X]$.

Si $P \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$ alors $\deg(\delta^{j-1}(P)) = \deg P - j + 1 \leq 0$

donc $\delta^{j-1}(P)$ est un polynôme constant et donc $\delta^j(P) = 0$

Donc $\mathbb{R}_{j-1}[X] \subseteq \operatorname{Ker}(\delta^j)$.

Ainsi $\boxed{\operatorname{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X].}$

De plus $\operatorname{Im}(\delta^j) \subseteq \mathbb{R}_{n-j}[X]$. Le théorème du rang appliqué à δ^j donne l'égalité des dimensions.

Donc $\boxed{\operatorname{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]}$

4. Comme τ et id commutent on peut utiliser la formule du binôme :

$$\delta^k = (\tau - id)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \cdot \tau^j$$

donc $\delta^k(P) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \cdot (-1)^{k-j} \cdot \tau^j(P)$

---

5. Si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ alors $\delta^n(P) = 0$

donc $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \cdot \tau^j(P) = 0$

donc $\tau^j(P) = P(X+j)$.

Donc $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} . (-1)^{n-j} . P(X+j) = 0_{\mathbb{R}[X]}$

On évalue ces polynômes en 0 : $\boxed{\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} . (-1)^{k-j} . P(j) = 0}$

6. (a) La famille $(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P))$ est de degrés échelonnés donc elle est libre.

Elle est libre maximale dans $\mathbb{R}_d[X]$ donc elle est une base de $\mathbb{R}_d[X]$. En particulier, elle engendre $\mathbb{R}_d[X]$.

6. (b) Soit V sev de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par δ et tq $V \neq \{0\}$.

Soit $P \in V$ tq $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$

Si $d = \deg(P)$ alors, comme V stable par δ, la famille $(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P))$ est incluse dans V, et donc $\mathbb{R}_d[X] \subseteq V$.

On pose alors $d = \max \{ \deg P ; P \in V \}$ (existe car l'ensemble est fini, car inclus dans $[\![0,n]\!]$)

Par construction de d : $V \subseteq \mathbb{R}_d[X]$.

Donc $V = \mathbb{R}_d[X]$

Partie II

7.(a) $\deg H_k = k$

donc la famille $(H_0, \dots, H_n)$ est de degrés échelonnés

et est donc libre.

Comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$, elle est libre maximale dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Donc la famille $(H_0, \dots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

7.(b) $\delta(H_0) = 0$

Si $k \in [\![1, n]\!]$, $H_k(X+1) = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X+1-j) = \frac{1}{k!} \prod_{i=-1}^{k-2} (X-i)$

$$= (X+1) \cdot \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-2} (X-i)$$

donc $\delta(H_k) = \frac{1}{k!} \left(\prod_{i=0}^{k-2} (X-i) \right) \times \left((X+1) - (X-k+1) \right)$

$$= \frac{1}{(k-1)!} \times \prod_{i=0}^{k-2} (X-i) = H_{k-1}$$

7.(c) Si $k > \ell$ $\delta^k(H_\ell) = 0_{\mathbb{R}[X]}$ donc $\delta^k(H_\ell)(0) = 0$

Si $k = \ell$ $\delta^k(H_\ell) = H_0 = 1$ donc $\delta^k(H_\ell)(0) = 1$

Si $k < \ell$ $\delta^k(H_\ell) = H_{k-\ell}$ donc $\delta^k(H_\ell)(0) = 0$

7.(d) Comme $(H_0, \dots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$

s'écrit de manière unique :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot H_k \text{ où } (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Comme pour $j \in [\![0, n]\!]$, δ^j est linéaire :

$$\delta^j(P) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k . \delta^j(H_k)$$

donc $$\delta^j(P)(0) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k . \delta^j(H_k)(0) = \alpha_j$$

Finalement : $$\underline{P = \sum_{k=0}^{n} \delta^k(P)(0) . H_k}$$

8.(a) $$H_n(k) = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (k-j) = \frac{1}{n!} \times k \times (k-1) \times \dots \times (k-n+1)$$

- si $k \in [\![0, n-1]\!]$: $H_n(k) = \underline{0}$
- si $k \geqslant n$: $H_n(k) = \frac{1}{n!} \times \frac{k!}{(k-n)!} = \underline{\binom{k}{n}}$

- si $k \leqslant -1$: $k = -|k|$

$$H_n(k) = \frac{(-1)^n}{n!} |k| \times (|k|+1) \times \dots \times (|k|+n-1)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!} \times \frac{(|k|+n-1)!}{(|k|-1)!} = \underline{(-1)^n \times \binom{|k|+n-1}{n}}$$

8.(b) On a donc $\forall k \in \mathbb{Z}$, $H_n(k) \in \mathbb{Z}$ ie $\underline{H_n(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}}$

8.(c) On suppose que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $P(k) \in \mathbb{Z}$.

Alors $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\delta(P)(k) = P(k+1) - P(k) \in \mathbb{Z}$

donc $\underline{\delta(P)(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}}$

8. (d) $\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que $P(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$.

Alors $\delta(P)(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$ puis $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\delta^k(P)(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$

et donc $\delta^k(P)(0) \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\delta^k(P)(0) \in \mathbb{Z}$

Si $j \in \mathbb{Z}$: $P(j) = \sum\limits_{k=0}^{n} \underbrace{\delta^k(P)(0)}_{\in \mathbb{Z}} \times \underbrace{H_k(j)}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$

donc $P(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$.

Ainsi : $P(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z} \iff \forall k \in [\![0,n]\!]$, $\delta^k(P)(0) \in \mathbb{Z}$

8. (e) On a $P = \sum\limits_{k=0}^{d} \delta^k(P)(0) . H_k$ car $P \in \mathbb{R}_d[X]$

donc $d! \times P = \sum\limits_{k=0}^{d} \underbrace{\delta^k(P)(0)}_{\in \mathbb{Z}} \times d! \times H_k$

Mais $d! \times H_k = \dfrac{d!}{k!} \prod\limits_{i=0}^{k-1} (X-i) = d(d-1)\dots(k+1) \times \prod\limits_{i=0}^{k-1}(X-i)$

donc $d! \times H_k \in \mathbb{Z}[X]$

Et donc $d! \times P \in \mathbb{Z}[X]$

La réciproque est fausse : si $P = \frac{1}{2} X^2$ alors $2! \times P = X^2 \in \mathbb{Z}[X]$

mais $P(0) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

Partie III

9.(a) $x \longmapsto x+1$ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

f est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc par composition $x \longmapsto f(x+1)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Puis par addition $x \longmapsto f(x+1) - f(x)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc $\delta(f)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus $\forall x>0$, $\delta(f')(x) = f'(x+1) - f'(x) = (\delta(f))'(x)$. Donc $\delta(f') = (\delta(f))'$

9.(b) De même qu'à la question 4. on a :

$$(\delta^n(f))(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} f(x+j)$$

9.(c) Comme f est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est continue sur $[x, x+1]$

et dérivable sur $]x, x+1[$.

Le théorème des accroissements finis donne alors :

$$\exists c_1 \in]x, x+1[; \quad \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f'(c_1)$$

On pose $y_1 = c_1 - x$.

On a $y_1 \in]0,1[$ et $f(x+1) - f(x) = f'(x+y_1)$

9.(d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note H_n le prédicat :

"$\forall x>0, \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*), \exists y_n \in]0, n[; \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \cdot f(x+j) = f^{(n)}(x+y_n)$"

H_1 est vrai d'après 9.(c).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel H_n est vrai.

Soit $x > 0$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$.

On applique H_n à $\delta(f)$:

$$\exists y_n \in]0,1[; \ \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \cancel{f}(x+j) = (\delta(f))^{(n)}(x+y_n)$$

$$\underset{9.(a)}{=} \delta\left(f^{(n)}\right)(x+y_n)$$

$$\text{ie } \delta^n(\delta(f))(x) = f^{(n)}(x+1+y_n) - f^{(n)}(x+y_n)$$

$$\text{ie } \delta^{n+1}(f)(x) = f^{(n)}(x+1+y_n) - f^{(n)}(x+y_n)$$

On applique le TAF à $f^{(n)}$ entre $x+y_n$ et $x+1+y_n$:

$$\delta^{n+1}(f)(x) = f^{(n+1)}(c) \quad \text{où } c \in]x+y_n, x+1+y_n[$$

On pose $y_{n+1} = c - x$.

alors $y_{n+1} \geq y_n > 0$

$y_{n+1} \leq y_n + 1 < n+1$

donc $\underline{y_{n+1} \in]0, n+1[}$ et $\underline{\delta^{n+1}(f)(x) = f^{(n+1)}(x+y_{n+1})}$

Donc H_{n+1} est vrai.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, H_n est vrai.

10.(a) k se décompose en un produit de nombre premiers :

$$k = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\nu_i} \quad \text{où } p_1, \dots, p_n \text{ premiers et } \nu_1, \dots, \nu_n \text{ entiers naturels}$$

donc $$k^\alpha = \prod_{i=1}^{n} \left(p_i^{\alpha \nu_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \left(p_i^{\alpha}\right)^{\nu_i} \in \mathbb{N}$$

k^α est un entier naturel

10.(b) Par l'absurde si $\alpha < 0$: $2^\alpha \in \mathbb{N}$

donne $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\alpha} \in \mathbb{N}$

Mais $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\alpha} < 1^{-\alpha} = 1$ donc on aurait $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\alpha} = 0$. Absurde

Donc $\alpha \geqslant 0$.

10.(c) $\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que $\alpha \in \mathbb{N}$.

Alors $\forall x > 0$, $f_\alpha^{(\alpha)}(x) = \alpha!$ donc $f_\alpha^{(\alpha+1)}(x) = 0$

Donc l'une des dérivées de f_α s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que l'une des dérivées de f_α s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$:

$\exists n \in \mathbb{N}, \exists x_0 > 0 ; \; f_\alpha^{(n)}(x_0) = 0$

ie $\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha - n + 1) x_0^{\alpha - n} = 0$

Comme $x_0 > 0$: $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$ ou .... ou $\alpha = n-1$

et donc $\alpha \in \mathbb{N}$.

Ainsi : $\alpha \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists x_0 > 0 ; \; f_\alpha^{(n)}(x_0) = 0$

11.(a) On sait que $\forall k \in \mathbb{N},\ k^\alpha \in \mathbb{N}$.

Donc $\forall j \in [\![0,n]\!],\ f_\alpha(x+j) = (x+j)^\alpha \in \mathbb{N}$ puisque $x \in \mathbb{N}$.

Donc $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x+j) \in \mathbb{N}$

11.(b) $f_\alpha^{(n)}(x+y_n) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)\,(x+y_n)^{\alpha-n}$

Comme $n = \lfloor\alpha\rfloor + 1$: $f_\alpha^{(n)}(x+y_n) = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-\lfloor\alpha\rfloor)}{(x+y_n)^{\lfloor\alpha\rfloor+1-\alpha}}$

Comme $\lfloor\alpha\rfloor \leq \alpha$, $x \geq 1$ et $y_n \in]0,n[$ on a :

$$0 \leq f_\alpha^{(n)}(x+y_n) \leq \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-\lfloor\alpha\rfloor)}{x^{\lfloor\alpha\rfloor+1-\alpha}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_\alpha^{(n)}(x+y_n) = 0$

11.(c) Une suite d'entiers qui convergent vers 0 est égale à 0 à partir d'un certain rang (classique).

$$\exists x_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \geq x_0,\ \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \cdot f_\alpha(x+j) = 0 = f_\alpha^{(n)}(x+y_n)$$

D'après 10.(c) : $\alpha \in \mathbb{N}$