Correction DS9

EXERCICE 1

1. $g(u,v) = \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 - (u|v)^2$ car $(u|v) = (v|u)$

donc d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\underline{g(u,v) \geq 0}$$

Et $g(u,v) = 0 \iff$ u et v sont colinéaires

2.(a) On suppose $(u|w) = (v|w) = 0$.

donc $g(u,v,w) = \begin{vmatrix} \|u\|^2 & (u|v) & 0 \\ (u|v) & \|v\|^2 & 0 \\ 0 & 0 & \|w\|^2 \end{vmatrix} \underset{\text{on développe}}{=} \|w\|^2 \times \begin{vmatrix} \|u\|^2 & (u|v) \\ (u|v) & \|v\|^2 \end{vmatrix}$

donc $g(u,v,w) = \|w\|^2 \times g(u,v)$

2.(b) On suppose que $\exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$; $w = \alpha u + \beta v$

$$g(u,v,w) = \begin{vmatrix} \|u\|^2 & (u|v) & \alpha\|u\|^2 + \beta(u|v) \\ (u|v) & \|v\|^2 & \alpha(u|v) + \beta\|v\|^2 \\ (u|w) & (v|w) & \alpha(u|w) + \beta(v|w) \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{linéarité p/r à } C_3}{=} \alpha \begin{vmatrix} \|u\|^2 & (u|v) & \|u\|^2 \\ (u|v) & \|v\|^2 & (u|v) \\ (u|w) & (v|w) & (u|w) \end{vmatrix} + \beta \cdot \begin{vmatrix} \|u\|^2 & (u|v) & (u|v) \\ (u|v) & \|v\|^2 & \|v\|^2 \\ (u|w) & (v|w) & (v|w) \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{le déterminant est alterné}}{=} 0 + 0 = 0$$

2.(c) On suppose $w = t + n$ où $t \in \mathrm{Vect}(u,v)$ et $n \perp u$, $n \perp v$. (2)

On a donc $n \perp t$ et d'après Pythagore : $\|w\|^2 = \|t\|^2 + \|n\|^2$

$$g(u,v,w) = \begin{vmatrix} \|u\|^2 & (u|v) & (u|t) + \cancel{(u|n)} \\ (u|v) & \|v\|^2 & (v|t) + \cancel{(v|n)} \\ (u|t) + \cancel{(u|n)} & (v|t) + \cancel{(v|n)} & \|t\|^2 + \|n\|^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \|u\|^2 & (u|v) & (u|t) \\ (u|v) & \|v\|^2 & (v|t) \\ (u|t) & (v|t) & \|t\|^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \|u\|^2 & (u|v) & 0 \\ (u|v) & \|v\|^2 & 0 \\ (u|t) & (v|t) & \|n\|^2 \end{vmatrix}$$

linéarité p/r à C_3

$$= \underbrace{g(u,v,t)}_{=0} + \|n\|^2 \times \begin{vmatrix} \|u\|^2 & (u|v) \\ (u|v) & \|v\|^2 \end{vmatrix}$$

car t CL de u et v

donc $\underline{g(u,v,w) = \|n\|^2 \times g(u,v)}$

2.(d) Comme $\mathrm{Vect}(u,v)$ est de dimension finie on a :

$$E = \mathrm{Vect}(u,v) \oplus \mathrm{Vect}(u,v)^\perp$$

Donc $w \in E$ se décompose sous la forme :

$$w = t + n \quad \text{où} \quad t \in \mathrm{Vect}(u,v) \text{ et } n \in \mathrm{Vect}(u,v)^\perp$$

On a alors :

$$g(u,v,w) = 0 \iff \|n\|^2 = 0 \text{ ou } g(u,v) = 0$$

$g(u,v,w)=0 \iff n=0$ ou (u et v colinéaires)

$\iff w \in \mathrm{Vect}(u,v)$ ou (u et v colinéaires)

$\iff (u,v,w)$ liée

Par contraposée : $g(u,v,w) \neq 0 \iff (u,v,w)$ est libre

EXERCICE 2

1. On peut obtenir une boule blanche dès le premier tirage (car $a \neq 0$).

Inversement, on peut ne tirer que des boules noires. Comme elles sont à chaque fois échangées contre des boules blanches, ceci ne peut arriver au maximum que b fois.

Le $(b+1)$-ième tirage donne alors une blanche à coup sûr.

Donc $Y(\Omega) = [\![1, b+1]\!]$

---

2. Soit $k \in [\![1, b+1]\!]$.

$$P(Y=1) = \frac{a}{N}$$

si $k \geq 2$: $(Y=k) = N_1 \cap .. \cap N_{k-1} \cap B_k$

où pour $i \in \mathbb{N}^*$: $B_i =$ "le i-ième tirage donne 1 blanche"

$N_i =$ "— — ... — — — noire"

D'après la formule des probabilités composées :

$$P(Y=k) = P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) \times \cdots \times P_{N_1 \cap .. \cap N_{k-1}}(B_k)$$

$$= \underbrace{\frac{b}{N} \times \frac{b-1}{N} \times \cdots \times \frac{b-k+2}{N}}_{k-1 \text{ termes}} \times \frac{a+k-1}{N} = \boxed{\frac{b! \times (a+k-1)}{(b-k+1)! \times N^k}}$$

↑ vrai si $k=1$

3.(a) On a donc $\mathbb{P}(Y=b+1) = \dfrac{b! \times (a+b)}{N^{b+1}} = \boxed{\dfrac{b!}{N^b}}$

$N = a+b$

3.(b) Pour $k \in [\![1, b]\!]$:

$a+b=N$

$$\mathbb{P}(Y=k) = \frac{b! \times (a+k-1)}{(b-k+1)! \times N^k} = \frac{b!\,(N-b+k-1)}{(b-k+1)! \times N^k}$$

$$= \frac{b! \times N}{(b-k+1)! \times N^k} - \frac{b! \times (b-k+1)}{(b-k+1)! \times N^k}$$

donc $\boxed{\mathbb{P}(Y=k) = \dfrac{b!}{(b-(k-1))! \times N^{k-1}} - \dfrac{b!}{(b-k)! \times N^k}}$

4. $$\sum_{k=1}^{M} k\,(a_{k-1} - a_k) = \sum_{k=1}^{M} \Big((k-1)a_{k-1} - k a_k + a_{k-1}\Big)$$

$$= \sum_{k=1}^{M} \Big((k-1)a_{k-1} - k a_k\Big) + \sum_{k=1}^{M} a_{k-1}$$

$$= 0 - M.a_M + \sum_{k=1}^{M} a_{k-1} = \boxed{-M.a_M + \sum_{k=0}^{M-1} a_k}$$

5. $$E(Y) \underset{def}{=} \sum_{k=1}^{b+1} k \cdot P(Y=k) = \left(\sum_{k=1}^{b} k \cdot P(Y=k)\right) + \frac{(b+1)!}{N^b}$$

on utilise la formule précédente avec $M=b$

et $a_k = \dfrac{b!}{(b-k)! \times N^k}$:

$$E(Y) = \left(\sum_{k=0}^{b-1} \frac{b!}{(b-k)! \times N^k}\right) \underbrace{- b \times \frac{b!}{N^b} + \frac{(b+1)!}{N^b}}_{= + \frac{b!}{N^b}}$$

donc $$\boxed{E(Y) = \sum_{k=0}^{b} \frac{b!}{(b-k)! \times N^k}}$$

EXERCICE 3

1. • Si P et Q sont polynomiales alors elles sont continues sur $\mathbb{R}$ donc leur produit $P \times Q$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc $\int_{-1}^{1} P(t) \times Q(t)\, dt$ existe et est un réel

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soient $(P, Q, R) \in E^3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

• $\langle \alpha P + Q, R \rangle = \int_{-1}^{1} (\alpha P(t) + Q(t)) \times R(t)\, dt$

$= \alpha . \int_{-1}^{1} P(t) \times R(t)\, dt + \int_{-1}^{1} Q(t) \times R(t)\, dt$ par linéarité de l'intégrale

$= \alpha . \langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche.

• $\langle Q, P \rangle = \int_{-1}^{1} Q(t) \times P(t)\, dt = \int_{-1}^{1} P(t) \times Q(t)\, dt = \langle P, Q \rangle$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.

Comme elle est linéaire à gauche, on peut en déduire qu'elle est bilinéaire.

• $\langle P, P \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)^2\, dt \geq 0$ car $\forall t \in [-1, 1],\ P(t)^2 \geq 0$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est positive.

- $\langle P,P\rangle = 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} P(t)^2\,dt = 0$

$\Rightarrow \forall t\in[-1,1],\ P(t)^2 = 0$ car P^2 continue et positive.

$\Rightarrow \forall t\in[-1,1],\ P(t) = 0$

$\Rightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ P(t) = 0$ car la seule fonction polynomiale ayant une infinité de racines est la fonction nulle

donc $\langle .,.\rangle$ est une forme définie.

En conclusion, $\langle .,.\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur E.

2.(a) Soient $(P,Q)\in E^2$ et $\alpha\in\mathbb{R}$.

$$\Delta(\alpha P+Q) = (X^2-1).(\alpha P''+Q'') + 2X.(\alpha P'+Q')$$
$$= \alpha\left[(X^2-1).P''+2X.P'\right] + (X^2-1)Q''+2XQ'$$
$$= \alpha.\Delta(P)+\Delta(Q)$$

donc Δ est linéaire.

et si $P\in E$ alors $\deg P\leq n$ donc $\deg(P')\leq n-1$ et $\deg(P'')\leq n-2$
Ainsi $\deg\Delta(P)\leq n$ donc Δ à valeurs dans E

Donc $\boxed{\Delta\in\mathcal{L}(E)}$

2.(b) $\Delta(1)=0$

$\Delta(X) = 2X$

si $k\in\mathbb{N}$ et $k\geq 2$, $(X^k)' = kX^{k-1}$ et $(X^k)'' = k(k-1)X^{k-2}$

donc $\Delta(X^k) = k(k-1).(X^k-X^{k-2}) + 2kX^k = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}$

$$\underset{\mathcal{B}_c}{\mathrm{Mat}}(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & & & & (0) \\ 0 & 2 & 0 & \ddots & k(k-1) & & \\ 0 & 0 & 6 & \ddots & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & k(k+1) & \ddots & n(n-1) \\ \vdots & \vdots & (0) & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}$$

La première colonne est nulle.

Les $n-1$ autres sont libres car échelonnées.

Donc $\underline{\mathrm{rg}(\Delta) = n}$

Comme $\mathrm{rg}(\Delta) < \dim E$ on en déduit que

$\underline{\Delta \text{ n'est pas un automorphisme de } E}$.

<u>2.(c)</u> La matrice de $\Delta - \lambda_k . id_E$ dans la base canonique est triangulaire supérieure et le k-ième coefficient de sa diagonale est nul. Elle n'est donc pas inversible.

Donc $\Delta - \lambda_k . id_E$ n'est pas un automorphisme de E.

Comme $\dim(E) < +\infty$ on en déduit que $\underline{\Delta - \lambda_k . id_E \text{ n'est pas injectif}}$.

Donc $\mathrm{Ker}(\Delta - \lambda_k . id) \neq \{0\}$.

Soit $Q_k \in \mathrm{Ker}(\Delta - \lambda_k . id_E)$ fixé tel que $Q_k \neq 0_E$.

On a donc $\Delta(Q_k) = k(k+1). Q_k$

Notons μX^d le terme dominant de Q_k :

$$Q_k = \mu X^d + \text{termes de degré} \leq d-1 \quad \text{avec } \mu \in \mathbb{R}^*.$$

Le terme dominant de $k(k+1)\mu$ est donc $\mu k(k+1)X^d$.

Le terme dominant de $\Delta(Q_k)$ est :

$$d(d-1)\mu X^d + 2d\mu X^d = d(d+1)\mu X^d$$

Par unicité on a donc $d = k$.

Donc $\deg(Q_k) = k$.

On pose alors $P_k = \frac{1}{\mu} . Q_k$ (on sait que $\mu \neq 0$).

Alors $\underline{\deg P_k = k}$ donc $\underline{P_k \in E}$ et $\underline{\text{le coefficient de } X^k \text{ est } 1}$

De plus $\Delta(P_k) = \frac{1}{\mu} . \Delta(Q_k) = \frac{1}{\mu} d_k . Q_k = \underline{d_k . P_k}$

$\underline{2.(d)}$ $$\langle \Delta(P), Q \rangle = \int_{-1}^{1} \underbrace{\left((t^2-1)P''(t) + 2t.P'(t)\right)}_{\frac{d}{dt}\left((t^2-1) \times P'(t)\right)} . Q(t)\, dt$$

IPP licite car les fcts polynomiales sont C^1

$$\stackrel{\text{IPP}}{=} \left[(t^2-1).P'(t).Q(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (t^2-1).P'(t).Q'(t)\, dt$$

$$= - \int_{-1}^{1} P'(t) \times (t^2-1) Q'(t)\, dt$$

$$= \langle \Delta(Q), P \rangle = \underline{\langle P, \Delta(Q) \rangle}$$

2.(e) $\langle \Delta(P_k), P_h \rangle = \langle P_k, \Delta(P_h) \rangle$

donc $\lambda_k . \langle P_k, P_h \rangle = \lambda_h . \langle P_k, P_h \rangle$

Comme $k \neq h$ on a $\lambda_k \neq \lambda_h$.

(en effet $t \mapsto t(t+1)$ est injective car str^t ↗ sur $\mathbb{R}$)

donc $\langle P_k, P_h \rangle = 0$

2.(f) La famille $(P_0, \dots, P_n)$ est donc orthogonale et formée de vecteurs non nuls.

Par théorème, elle est libre.

Comme $\dim(E) = n+1$ elle est libre maximale.

Donc $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de E.

$$\underset{B}{\mathrm{Mat}}(\Delta) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ Elle est diagonale.

EXERCICE 4

1.(a) La série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge car c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$. De plus :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \boxed{2}$$

1.(b) Si $x \notin]-1,1[$, $\lim_{n\to+\infty} |nx^{n-1}| = 1$ ou $+\infty$

donc la série $\sum nx^{n-1}$ diverge.

Si $x \in]-1,1[$ on sait d'après les croissances comparées que $\lim_{n\to+\infty} n^3|x|^{n-1} = 0$ donc $n|x|^{n-1} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum nx^{n-1}$ converge absolument, donc converge.

Ainsi : $\boxed{\sum nx^{n-1} \text{ converge} \iff x \in]-1,1[}$

Soit $x \in]-1,1[$.

On a $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+1)x^n - nx^n\right) = \frac{1}{1-x}$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n - \sum_{\substack{n=\cancel{0}\\ 1}}^{+\infty} nx^n = \frac{1}{1-x}$ (ce sont encore des sommes de séries convergentes)

nul si $n=0$

donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} - x \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$

donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}}$

1.(c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = n \cdot \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}\left(1 - \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{n}{2^n}$

On applique 1.(b) avec $x = \frac{1}{2} \in]-1, 1[$:

la série $\sum \frac{n}{2^{n-1}}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 4$

Si on multiplie par $\frac{1}{2}$ (qui ne dépend pas de n) :

la série $\sum b_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = 2$

2.(a) Soit $f : t \longmapsto \frac{1}{t \cdot \ln t}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

f est dérivable et $\forall t > 0$, $f'(t) = -\frac{1+\ln t}{t^2 \cdot \ln^2 t}$

t	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	0

Sur $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$ f est décroissante et positive.

Or si $n \geq 2$ alors $n \in \left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

Donc $(a_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante de limite nulle.

2.(b) Pour $k \geqslant 2$, f est décroissante sur $[k, k+1]$ donc :

$$\forall t \in [k, k+1], \quad \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \frac{1}{t.\ln t} \leqslant \frac{1}{k.\ln k}$$

donc par croissance de l'intégrale :

$$a_{k+1} = \int_k^{k+1} a_{k+1}\, dt \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t.\ln t} \leqslant \int_k^{k+1} a_k\, dt = a_k$$

Pour $n \geqslant 2$, on somme pour k allant de 2 à n :

$$\sum_{k=2}^{n} a_{k+1} \leqslant \int_2^{n+1} \frac{dt}{t.\ln t} \leqslant \sum_{k=2}^{n} a_k$$

ie $A_n + a_{n+1} - \underbrace{a_2 - a_1}_{=0} \leqslant \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \leqslant A_n - \underbrace{a_1}_{=0}$

En particulier : $\forall n \geqslant 2$, $A_n \geqslant \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2)$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = +\infty$.

Donc la série $\sum a_n$ diverge.

2.(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} n.a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} = \boxed{0}$

2.(d) $\forall n \geq 2$, $b_n = n.\left(\frac{1}{n.\ln n} - \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\right)$

$$= \frac{(n+1)\ln(n+1) - n.\ln n}{(n+1).\ln n.\ln(n+1)}$$

or $\ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$

donc $(n+1).\ln n.\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \ln^2(n)$

De plus :
$(n+1).\ln(n+1) = (n+1).\left(\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$

donc $(n+1).\ln(n+1) - n.\ln n = \ln n + (n+1).\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$\underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$ (l'autre terme converge vers 1)

Par quotient : $\boxed{b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n.\ln n}}$

Et d'après ce qui précède et par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum b_n$ diverge.

3.(a) Pour $p \in [\![n+1, 2n]\!]$ on a $a_{2n} \leq a_p$
car la suite (a_n) est décroissante.

On a donc $\sum_{p=n+1}^{2n} a_{2n} \leq \sum_{p=n+1}^{2n} a_p$ ie $n.a_{2n} \leq u_n$

3.(b) On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = A_{2n} - A_n$

Or la série $\sum a_n$ converge donc la suite (A_n) converge.

Par soustraction : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant n a_{2n} \leqslant u_n$

donc par encadrement : $\lim\limits_{n \to +\infty} n . a_{2n} = 0$

3.(c) On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2n . a_{2n} = 2 \times 0 = 0$

De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant a_{2n+1} \leqslant a_{2n}$ car $(a_n) \searrow$

$$0 \leqslant (2n+1) a_{2n+1} \leqslant \underbrace{(2n+1) a_{2n}}_{= 2n . a_{2n} + a_{2n}}$$

donc par encadrement : $\lim\limits_{n \to +\infty} (2n+1) . a_{2n+1} = 0$

D'après le théorème des suites extraites recouvrantes :

$$\lim_{n \to +\infty} n . a_n = 0$$

3.(d) Par $n \in \mathbb{N}^*$:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} \left(k a_k - (k+1) a_{k+1} + a_{k+1} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(k a_k - (k+1) a_{k+1} \right) + \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}$$

$$= a_1 - (n+1) a_{n+1} + A_{n+1} - a_1$$

Donc (B_n) converge et :

$$\lim_{n\to+\infty} B_n = \cancel{a_1} - 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \cancel{a_1}$$

Donc la série $\sum b_n$ converge

3.(e) et on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

4.(a) Si $m \leq n$:

on vient de voir que $B_n = A_{n+1} - (n+1)a_{n+1}$

Donc $\displaystyle B_n = \sum_{k=m+1}^{n+1} a_k + A_m - (n+1)a_{n+1}$

Comme (a_n) est décroissante :

$$\forall k \in [\![m+1, n+1]\!], \quad a_k \geq a_{n+1}$$

donc $\displaystyle\sum_{k=m+1}^{n+1} a_k \geq \sum_{k=m+1}^{n+1} a_{n+1} = (n-m+1)a_{n+1}$

Donc $B_n \geq A_m + (n-m+1)a_{n+1} - (n+1)a_{n+1}$

Donc $B_n \geq A_m - m.a_{n+1}$

4.(b) Comme (B_n) converge vers $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ et comme (a_n) converge vers 0, on a par prolongement des inégalités lorsque $n \to +\infty$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \geqslant A_m \quad \text{ceci pour tout } m \in \mathbb{N}^*$$

cste

Donc la suite $(A_n) = (A_m)$ est majorée.
Comme la série $\sum a_n$ est à termes positifs, on en déduit qu'elle est convergente.

4. (c) On peut donc appliquer le 3. et on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$