Correction concours blanc

EXERCICE 1

1.(a) La fonction ln est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et la fonction $x \mapsto x+1$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et prends ses valeurs dans $]0,+\infty[$. Par composée la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est C^1 sur $]0,+\infty[$.

Donc f est C^1 sur $]0,+\infty[$ en quotient de fonctions C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas.

Elle est donc continue sur $]0,+\infty[$.

De plus $f(0)=1$

et $f(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Donc f est continue à droite en 0.

Donc f est continue sur $[0,+\infty[$.

1.(b) $\forall x>0$, $f'(x) = \dfrac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \dfrac{x-(1+x).\ln(1+x)}{x^2}$

Donc $f'(x) \underset{x\to 0^+}{=} \frac{1}{x^2}\times\left(x-(1+x)\times\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\right)$

$\underset{x\to 0^+}{=} \frac{1}{x^2}\times\left(x-x+\frac{x^2}{2}-x^2+o(x^2)\right)$

$\underset{x\to 0^+}{=} -\frac{1}{2}+o(1)$

donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -\frac{1}{2}$

On a donc : • f continue sur $[0,+\infty[$

• f de classe C^1 sur $]0,+\infty[$

• $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -\frac{1}{2}$

D'après le théorème de prolongement du caractère C^1, on en déduit que <u>f est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$</u> et <u>$f'(0) = -\frac{1}{2}$</u>

<u>1.(c)</u> Pour $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $\theta(x) = x - (1+x).\ln(1+x)$

θ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$\forall x > 0, \quad \theta'(x) = 1 - 1 - \ln(1+x) = -\ln(1+x) < 0$

Donc θ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme $\theta(0^+) = 0$ on a donc $\forall x > 0, \ \theta(x) < 0$.

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc sur $\mathbb{R}^+$ (par continuité en 0).

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x} \times \frac{1+x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad \text{car} \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$$

x	0		$+\infty$
f	1	$\searrow$	0

2.(a) Comme $-t \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{N}(-1)^k t^k = \sum_{k=0}^{N}(-t)^k = \frac{1-(-t)^{N+1}}{1-(-t)} = \frac{1-(-1)^{N+1}.t^{N+1}}{1+t}$$

donc $$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k.t^k + \frac{(-1)^{N+1}.t^{N+1}}{1+t}$$

2.(b) Puisque $[0,x] \subseteq [0,1]$ on peut intégrer l'égalité précédente entre 0 et x. Par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{k=0}^{N}\left((-1)^k.\int_0^x t^k dt\right) + J_N(x)$$

donc $$\ln(1+x) = \left(\sum_{k=0}^{N}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}\right) + J_N(x)$$

2.(c) D'après l'inégalité triangulaire pour l'intégrale :

$$|J_N(x)| \leq \int_0^x \left|\frac{(-1)^{N+1}.t^{N+1}}{1+t}\right| dt = \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1+t} dt$$

Mais si $t \in [0,x]$ alors $0 \leqslant \frac{1}{1+t} \leq 1$

donc $0 \leqslant \frac{t^{N+1}}{1+t} \leq t^{N+1}$

Par croissance de l'intégrale :

$$|J_N(x)| \leq \int_0^x t^{N+1} dt \quad \text{donc} \quad |J_N(x)| \leq \frac{x^{N+2}}{N+2}$$

2.(d) Comme $x \in [0,1]$, $\lim\limits_{N \to +\infty} x^{N+2} = 0$ ou 1

donc $\lim\limits_{N \to +\infty} \dfrac{x^{N+2}}{N+2} = 0$

Par encadrement : $\lim\limits_{N \to +\infty} |J_N(x)| = 0$ et donc $\lim\limits_{N \to +\infty} J_N(x) = 0$

2.(b) donne alors : $\lim\limits_{N \to +\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{N} (-1)^k \dfrac{x^{k+1}}{k+1} \right) = \ln(1+x)$

ou encore : $\lim\limits_{N \to +\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{N+1} (-1)^{k-1} \dfrac{x^k}{k} \right) = \ln(1+x)$

donc : $\lim\limits_{N \to +\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \cdot \dfrac{x^k}{k} \right) = \ln(1+x)$

Par définition, la série $\sum\limits_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{x^n}{n}$ converge et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} = \ln(1+x)$$

3.(a) On divise l'identité du 2.(b) par x, pour $x \in]0,1]$:

$$f(x) - \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{x^k}{k+1} = \frac{1}{x} J_N(x)$$

et donc avec 2.(c) :

$$\forall x \in]0,1], \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{x^k}{k+1} \right| \leqslant \frac{x^{N+1}}{N+2}$$

et c'est vrai pour $x = 0$ car $|1 - 1| \leqslant 0$

3.(b) On a :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 f(x)\,dx - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \int_0^1 \left(f(x) - \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{x^k}{k+1} \right) dx$$

donc $0 \leqslant \left| \int_0^1 f(x)\,dx - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} \right| \leqslant \int_0^1 \left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{x^k}{k+1} \right| dx$

inégalité Δ

$$\leqslant \int_0^1 \frac{x^{N+1}}{N+2}\,dx = \frac{1}{(N+2)^2}$$

croissance de $\int$

Par encadrement : $\lim\limits_{N \to +\infty} \left| \int_0^1 f(x)\,dx - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} \right| = 0$.

donc : $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \int_0^1 f(x)\,dx$

Par changement d'indice : $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \int_0^1 f(x)\,dx$

Ceci prouve que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge et

que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \int_0^1 f(x)\,dx$

3.(c) En séparant les sommes en deux paquets correspondant aux indices n pairs et impairs :

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{(2p)^2}$$

$$= \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2}$$

et $$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{(-1)^{2p+1-1}}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{(-1)^{2p-1}}{(2p)^2}$$

$$= \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{(4p)^2}$$

3.(d) Posons $\forall N \in \mathbb{N}$, $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$

D'après le résultat admis : $\lim_{N \to +\infty} S_N = \frac{\pi^2}{6}$

Or $$S_{2N+1} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \frac{1}{4} S_N$$

donc $$\lim_{N \to +\infty} \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$$

On en déduit que $$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}$$

Donc $$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$ (puisqu'on sait déjà que cette limite existe)

On a donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

donc $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{\pi^2}{12}$

EXERCICE 2

1. (a) On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

L'équation caractéristique est $2z^2 - z - 1 = 0$

$$\iff 2(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right) = 0$$

Donc $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \lambda . 1^n + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$$= \lambda + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

De plus $\begin{cases} v_1 = \dfrac{5}{6} = \lambda - \dfrac{\mu}{2} \\ v_2 = \dfrac{11}{12} = \lambda + \dfrac{\mu}{4} \end{cases}$ donc $\begin{cases} \lambda = \dfrac{8}{9} \\ \mu = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{9} \end{cases}$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \dfrac{8}{9} + \dfrac{1}{9} \times \left(\dfrac{-1}{2}\right)^n$

---

1. (b) $v_1 = w_1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{6}$ OK

$v_2 = w_2 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{9}{4} - \dfrac{4}{3} = \dfrac{11}{12}$ OK

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{2}(v_{n+1} + v_n) = \dfrac{1}{2}\left(w_{n+1} - \dfrac{2(n+1)}{3} + w_n - \dfrac{2n}{3}\right)$

$$= \frac{1}{2}(w_{n+1} + w_n) - \frac{2n+1}{3}$$

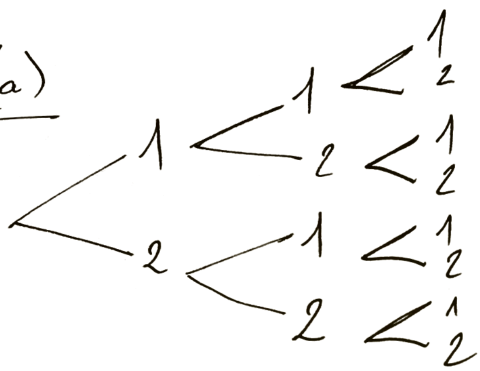
$$= w_{n+2} - 1 - \frac{2n+1}{3}$$

$$= v_{n+2} + \frac{2(n+2)}{3} - 1 - \frac{2n+1}{3} = v_{n+2} \quad \text{OK}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n - \frac{2n}{3} = v_n = \frac{8}{9} + \frac{1}{9}\left(\frac{-1}{2}\right)^n$

et finalement : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \frac{8}{9} + \frac{1}{9}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)^n + \frac{2n}{3}$

2. (a)



$T_1(\Omega) = \{1, 2\}$ $\quad (T_1 = 1) = (X_1 = 2)$ donc $\mathbb{P}(T_1 = 1) = \frac{1}{2}$

et donc $\mathbb{P}(T_1 = 2) = \frac{1}{2}$

x	1	2
$\mathbb{P}(T_1 = x)$	$1/2$	$1/2$

$T_2(\Omega) = \{2, 3\}$ $\quad (T_2 = 3) = (X_1 = 2) \cap (X_2 = 1)$

or les variables X_1, X_2 sont mutuellement indépendantes.

donc $\mathbb{P}(T_2 = 3) = \mathbb{P}(X_1 = 1) \times \mathbb{P}(X_2 = 1)$

$= \frac{1}{4}$

et donc $\mathbb{P}(T_2 = 2) = \frac{3}{4}$

x	2	3
$\mathbb{P}(T_2 = x)$	$3/4$	$1/4$

2.(b) On cherche le moment où la somme des n° devient ≥ 5

Au pire des cas : 1, 1, 1, 1, 1, 1 donc $T_5 = 6$

Au meilleur des cas : 2, 2, 2 donc $T_5 = 3$

Ainsi $T_5(\Omega) = \{3; 4; 5; 6\}$

2.(c) et (d)

$T_5 \backslash X_1$	1	2	Loi de T_5
3	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{9}{16}$
5	$\frac{7}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{9}{32}$
6	$\frac{1}{32}$	0	$\frac{1}{32}$

$$E(T_5) = 3 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{9}{16} + 5 \times \frac{9}{32} + 6 \times \frac{1}{32} = \frac{135}{32}$$

$$E(T_5^2) = 3^2 \times \frac{1}{8} + 4^2 \times \frac{9}{16} + 5^2 \times \frac{9}{32} + 6^2 \times \frac{1}{32} = \frac{585}{32}$$

donc $V(T_5) = \frac{495}{1024}$

3.(a) Avec le même raisonnement qu'au 2.(b) on trouve :

- si N pair alors $T_N(\Omega) = [\![\frac{N}{2} + 1 ; N+1]\!]$
- si N impair alors $T_N(\Omega) = [\![\frac{N-1}{2} + 1 ; N+1]\!]$

3.(b) En appliquant la formule des probabilités totales avec le sce $((X_1=1),(X_1=2))$ on a :

$$\mathbb{P}(T_{N+2}=k)=\mathbb{P}((X_1=1)\cap(T_{N+2}=k))+\mathbb{P}((X_1=2)\cap(T_{N+2}=k))$$

or $(X_1=2)\cap(T_{N+2}=k)=(X_1=2)\cap(S_k>N+2)\cap(S_{k-1}\leq N+2)$

$$=(X_1=2)\cap(S'_k+2>N+2)\cap(S'_{k-1}+2\leq N+2)$$

$$=(X_1=2)\cap(S'_k>N)\cap(S'_{k-1}\leq N)$$

Mais l'évènement $(X_1=2)$ est indépendant de $(S'_k>N)\cap(S'_{k-1}\leq N)$ donc :

$$\mathbb{P}((X_1=2)\cap(T_{N+2}=k))=\mathbb{P}(X_1=2)\times\mathbb{P}((S'_k>N)\cap(S'_{k-1}\leq N))$$

$$=\mathbb{P}(X_1=2)\times\mathbb{P}((S_{k-1}>N)\cap(S_{k-2}\leq N))$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\mathbb{P}(T_N=k-1)$$

résultat admis dans l'énoncé

De même on montre que $\mathbb{P}((X_1=1)\cap(T_{N+2}=k))=\frac{1}{2}\mathbb{P}(T_{N+1}=k-1)$

Finalement : $\mathbb{P}(T_{N+2}=k)=\frac{1}{2}\mathbb{P}(T_{N+1}=k-1)+\frac{1}{2}\mathbb{P}(T_N=k-1)$

C'est vrai pour $k=1$ et $k=2$ car $0=\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}\times 0$

puisque T_N, T_{N+1} sont str-t plus grandes que 1 et T_{N+2} est str-t plus grande que 2

Preuve du résultat admis : comme $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes et de même loi, les vecteurs $(X_1, \dots, X_{n-1})$ et $(X_2, \dots, X_n)$ ont même loi conjointe.

D'après le lemme des coalitions (S_{k-2}, S_{k-1}) a donc même loi que (S'_{k-1}, S'_k).

3. (c) $$\mathbb{E}(T_N) = \sum_{k \in T_N(\Omega)} k \times \mathbb{P}(T_N = k)$$

Mais $T_N(\Omega) \subseteq [\![1, N+1]\!]$ et $\mathbb{P}(T_N = k)$ si $k \notin T_N(\Omega)$

donc $$\mathbb{E}(T_N) = \sum_{k=1}^{N+1} k \times \mathbb{P}(T_N = k)$$

De même $$\mathbb{E}(T_{N+2}) = \sum_{k=1}^{N+3} k \times \mathbb{P}(T_N = k)$$

En utilisant 3. (b) on a :

$$\sum_{k=1}^{N+3} k . \mathbb{P}(T_{N+2} = k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N+3} k . \mathbb{P}(T_{N+1} = k-1) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N+3} k \times \mathbb{P}(T_N = k-1)$$

Mais $$\sum_{k=1}^{N+3} k . \mathbb{P}(T_N = k-1) = \sum_{k=0}^{N+2} (k+1) . \mathbb{P}(T_N = k)$$

$$= \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{N+2} k . \underbrace{\mathbb{P}(T_N = k)}_{=0 \text{ si } k=0} + \sum_{k=0}^{N+2} \mathbb{P}(T_N = k) = \mathbb{E}(T_N) + 1$$

De même $\sum_{k=1}^{N+3} k.\mathbb{P}(T_{N+1}=k-1) = \mathbb{E}(T_{N+1})+1$

Finalement : $\mathbb{E}(T_{N+2}) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}(T_{N+1})+\mathbb{E}(T_N)\right)+1$

3. (d) $\mathbb{E}(T_1)=\frac{3}{2}$ et $\mathbb{E}(T_2)=\frac{9}{4}$ donc on peut utiliser le préliminaire :

$$\mathbb{E}(T_N) = \frac{8}{9}+\frac{1}{9}\times\left(\frac{-1}{2}\right)^N+\frac{2N}{3} = \underline{\frac{6N+8}{9}+\frac{1}{9}\left(\frac{-1}{2}\right)^N}$$

Par croissances comparées : $\lim_{N\to+\infty}\frac{\mathbb{E}(T_N)}{N} = \frac{6}{9} = \boxed{\frac{2}{3}}$

C'est plausible car on tire avec équiprobabilité 1 ou 2 à chaque tirage, et si on fait n tirages avec autant de 1 que de 2 alors $S_n = 2\frac{n}{2}+\frac{n}{2} = \frac{3n}{2}$, et donc $S_n > N$ pour $n > \frac{2N}{3}$.