

PROBLÈME 1 : Matrices à coefficients positifs

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1. On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. I_n est la matrice identité d'ordre n et $0_{n,1}$ est la matrice colonne dont les n lignes sont nulles.

Partie I : Matrices à diagonale strictement dominante.

Soit $A = ((a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dira que A est une *matrice à diagonale strictement dominante* lorsqu'elle vérifie la condition :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|$$

1. Soit $A = ((a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A est à diagonale strictement dominante.

(a) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est une matrice colonne telle que $AX = 0$. Montrer que $X = 0_{n,1}$.
On pourra raisonner par l'absurde en supposant que $m = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) > 0$ et considérer un $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|x_{i_0}| = m$.

(b) En déduire que A est inversible.

2. Soit $A = ((a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A vérifie la propriété (P) suivante :

$$(P) \quad : \quad \begin{cases} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad a_{i,i} > 0 \\ \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad i \neq j \implies a_{i,j} \leq 0 \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} > 0 \end{cases}$$

(a) Montrer que A est à diagonale strictement dominante et en déduire qu'elle est inversible.

(b) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tel que la matrice colonne AX ait tous ses coefficients positifs

ou nuls.

Montrer que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \geq 0$.

On pourra considérer $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $x_{i_0} = \min(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

(c) On note $b_{i,j}$ le coefficient en position (i, j) dans la matrice inverse de A :
 $A^{-1} = ((b_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$.

Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, que vaut le produit $A \times \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix}$?

(d) En déduire que les coefficients de A^{-1} sont tous positifs ou nuls.

(e) Exemple. On prend ici $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et considère pour $\alpha > 0$: $A_\alpha = A + \alpha I_3$.

Établir que A_α vérifie la propriété (P) et calculer A_α^{-1} .

Partie II : Convergence de suites de matrices.

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note : $X_k = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$

On dit que $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si pour tout

$i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la suite réelle $(x_i^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers le réel x_i .

De même, pour $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si on note $M_k = (m_{i,j}^{(k)})_{1 \leq i,j \leq n}$, on dit que $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice $M = ((m_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si pour tout $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, la suite réelle $(m_{i,j}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers le réel $m_{i,j}$.

1. Généralités.

(a) Pour une matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on définit $m(X) = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$

Montrer qu'une suite de matrices colonnes $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice colonne X si, et seulement si, $\lim_{k \rightarrow +\infty} m(X_k - X) = 0$

(b) Pour une matrice $M = ((m_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on définit : $s(M) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |m_{i,j}| \right)$

Montrer qu'une suite de matrices $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ converge vers une matrice M si, et seulement si : $\lim_{k \rightarrow +\infty} s(M_k - M) = 0$

(c) Montrer que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad m(MX) \leq s(M) \times m(X)$

(d) En déduire que si une suite de matrices $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors pour toute matrice colonne X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la suite $(M_k X)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers MX dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

(e) Réciproquement si on dispose d'une suite de matrices $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que pour toute matrice colonne X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la suite $(M_k X)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers MX dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, montrer que la suite de matrices $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(f) Montrer encore que : $\forall (M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, \quad s(MN) \leq s(M) \times s(N)$

(g) Établir maintenant que : $\forall (Y, Z) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2, \quad m(Y + Z) \leq m(Y) + m(Z)$

En déduire que : $\forall (Y, Z) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2, \quad |m(Y) - m(Z)| \leq m(Y - Z)$

2. Convergence de la suite des inverses.

On considère ici une suite de matrices $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$, toutes inversibles, qui convergent vers une matrice M inversible.

(a) Soit X une matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$m(M_k^{-1}X - M^{-1}X) \leq s(M^{-1}) \times s(M - M_k) \times m(M_k^{-1}X)$$

puis établir que :

$$m(M_k^{-1}X) \times \left[1 - s(M^{-1}) \times s(M - M_k) \right] \leq m(M^{-1}X)$$

(b) En déduire l'existence d'un entier naturel k_0 tel que pour tout entier k supérieur à k_0 :

$$m(M_k^{-1}X) \leq 2 \times m(M^{-1}X)$$

(c) Montrer alors que la suite $(M_k^{-1}X)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $M^{-1}X$.

(d) Conclure alors que la suite de matrices $(M_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice M^{-1} .

3. Soient M une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une suite de matrices $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers M . On suppose de plus que les matrices M_k vérifient toutes la propriété (P).

Montrer que les coefficients de la matrices M^{-1} sont tous positifs ou nuls.

4. À partir de maintenant et dans toute la suite du problème, $A = ((a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ désigne la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\begin{cases} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, & a_{i,i} = 2 \\ \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, & a_{i,i+1} = -1 \\ \forall 2 \in \llbracket 1, n \rrbracket, & a_{i+1,i} = -1 \end{cases}$$

et les autres coefficients sont nuls.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \vdots & \ddots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Pour toute matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on note tX la matrice ligne

$$(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n).$$

Montrer que tXAX est un réel et exprimer le sous forme d'une somme de carrés.

En déduire que A est inversible.

(b) Établir que, pour tout réel α strictement positif, la matrice $A_\alpha = A + \alpha.I_n$ vérifie la propriété (P).

(c) Construire une suite de matrices vérifiant la propriété (P), qui converge vers A .

(d) En déduire que les coefficients A^{-1} sont tous positifs ou nuls.