PCSI 1 - DEVOIR MAISON N ° 10 **Année scolaire 2017-2018**
A rendre le lundi 8 janvier 2018

PROBLÈME : Moyenne arithmético-géométrique

Préliminaire

Soit $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que l'application $g :]0,+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrer que f est continue sur $]0,+\infty[$:

$$\forall x_0 \in]0,+\infty[, \quad \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} f(x_0+h) = f(x_0)$$

Partie I

Soit a et b deux réels positifs. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = a \ , v_0 = b \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2} \end{cases} .$$

1. Déterminer ces deux suites ainsi que leur limite dans les cas suivants :
   (a) $a = b$.
   (b) $a = 0$ et $b \in \mathbb{R}^+$ quelconque.
2. On revient au cas général et on se propose de montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq v_n$.
   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraires.
   (c) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq v_n - u_n \leq \dfrac{v_1-u_1}{2^{n-1}}$.
   (d) Conclure.

La limite commune à ces deux-suites est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b. Celle-ci sera désormais notée $M(a,b)$.

   (e) Donner $M(a,a)$ et $M(0,b)$ pour $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^+$.

Dans la suite du problème, nous pourrons noter $(u_n(a,b))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n(a,b))_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites précédentes.

3. On se propose d'établir quelques propriétés utiles de la fonction $(a,b) \longmapsto M(a,b)$.
   (a) Montrer que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$, $M(a,b) = M(b,a)$.
   (b) Montrer que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$, $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda \times M(a,b)$.
   (c) Montrer que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$, $M(a,b) = M\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right)$.
   (d) Montrer que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$, $\sqrt{ab} \leq M(a,b) \leq \frac{a+b}{2}$.

Partie II

On considère ici la fonction φ définie sur $[0, +\infty[$ par $\varphi(x) = M(1, x)$.

1. Donner $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$.
2. On désire prouve que la fonction φ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Pour cela, on considère $0 \leq x < y$ deux réels.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n(1, x) \leq u_n(1, y)$ et $v_n(1, x) \leq v_n(1, y)$.
   (b) Conclure.
3. On étudie ici la continuité de φ sur $\mathbb{R}^+$.
   (a) Montrer que : $\forall x > 0$, $\varphi(x) = x \times \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$.
   (b) En exploitant le préliminaire, montrer que φ est continue sur $]0, +\infty[$.
   (c) Montrer que : $\forall x \geq 0$, $\varphi(x) = \dfrac{1+x}{2} \times \varphi\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$.
   (d) En déduire que φ est continue à droite en 0 : $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = \varphi(0)$
4. On étudie ici le comportement de φ en $+\infty$.
   (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{x} \leq \varphi(x) \leq \dfrac{1+x}{2}$.
   (b) Etudier la limite de φ en $+\infty$.
5. Représenter sur un même graphe les allures des fonctions $x \longmapsto \varphi(x)$, $x \longmapsto \sqrt{x}$ et $x \longmapsto \frac{x+1}{2}$.
6. En exploitant l'encadrement du II.4.(a), étudier la dérivabilité de φ en 0 à droite et en 1, c'est-à-dire étudier si les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} \frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x - 1},$$

   existent et sont finies.