PCSI 1 - DEVOIR MAISON N ° 11 **Année scolaire 2017-2018**
A rendre le jeudi 25 janvier 2018

PROBLÈME : Une équation fonctionnelle

Le but de ce problème est d'étudier les fonctions u définies sur $\mathbb{R}$ telles que :

(i) u est continue sur $\mathbb{R}$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(2x) = \dfrac{2u(x)}{1+u(x)^2}$

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions vérifiant ces deux conditions.

Partie I : Étude d'une fonction particulière de $\mathcal{C}$

On note h la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1. Étudier la continuité de h. Déterminer les limites de h en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Établir que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq h(x) \leq 1$$
3. Déterminer un équivalent simple de h au voisinage de 0.
4. Montrer que la fonction h est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ et que :
$$\forall y \in]-1,1[, \quad h^{-1}(y) = \frac{1}{2}.\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$
5. Vérifier que la fonction h appartient à $\mathcal{C}$.

Partie II : Valeur des fonctions de $\mathcal{C}$ en zéro

Soit u une fonction de $\mathcal{C}$.

1. Établir que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq u(x) \leq 1$$
2. Vérifier que : $u(0) = 1$ ou $u(0) = -1$ ou $u(0) = 0$.

On suppose maintenant que u est une fonction de $\mathcal{C}$ non constante et telle que $u(0) = 1$.

3. Justifier qu'il existe un réel x_0 tel que $u(x_0) \neq 1$.
4. On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \frac{x_0}{2^n} \quad \text{et} \quad y_n = u(x_n)$$
Justifier que ces deux suites sont convergentes et préciser leur limite.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer y_n en fonction de y_{n+1}. En déduire que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ garde un signe constant.
6. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le signe de $y_{n+1} - y_n$. En déduire que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
7. Mettre en évidence une contradiction, en discutant suivant le signe de $u(x_0)$.

Dans la question suivante, u est une fonction de $\mathcal{C}$ non constante.

8. A l'aide des questions précédentes, donner la valeur de $u(0)$.