PCSI 1 - DEVOIR MAISON N ° 12 **Année scolaire 2017-2018**
A rendre le samedi 17 février 2018

<u>EXERCICE 1</u> : Théorème des accroissements finis et suites récurrentes

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} \times \dfrac{\ln(x)}{2} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$ et que pour $x > 0$ et $x \neq 1$:

$$f'(x) = \frac{-2x\ln(x) + x^2 - 1}{2x(x-1)^2}$$

   (b) Utiliser un DL pour calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} f'(x)$.

   (c) À l'aide du théorème du prolongement du caratère C^1, montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Préciser la valeur de $f'(1)$.

2. *On admet que* $\forall x > 0$, $\ln(x) \leqslant x - 1$, *avec égalité si et seulement si* $x = 1$.
Construire le tableau de variations de f. On précisera ses limites aux bornes de l'ensemble de définition.

3. Montrer que : $\forall x > 1$, $f(x) < x$.

4. Soit $a > 1$.

   (a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$ est bien définie et à valeurs dans $]1, +\infty[$.
   <u>Indication</u> : utiliser le théorème de la suite récurrente donné dans le chapitre 8.

   (b) Établir qu'elle converge vers 1.

   (c) Montrer que pour x au voisinage de 1, on a $\left|f'(x)\right| \leq \dfrac{1}{3}$.
   En déduire qu'il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad |x_{n+1} - 1| \leqslant \frac{1}{3}|x_n - 1|$$

   <u>Indication</u> : utiliser l'inégalité des accroissements finis.

   (d) En déduire que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad |x_n - 1| \leqslant \frac{1}{3^{n-n_0}}|x_{n_0} - 1|$$

   (e) En déduire que : $x_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 + o\left(\frac{1}{2^n}\right)$.