PCSI 1 - DEVOIR MAISON N $^\circ$ 13 **Année scolaire 2017-2018**
A rendre le mardi 6 mars 2018

<u>PROBLEME 1</u> : Quelques propriétés des polynômes de Laguerre[1]

On pose pour tout entier naturel n et tout réel x :

$$h_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad L_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{n!} h_n^{(n)}(x)$$

Partie I. Etude de la famille (L_n)

1. Justifier les écritures précédentes, c'est-à-dire que L_n est bien définie pour tout entier n.
2. Calculer L_0, L_1 et L_2 explicitement.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, L_n est une fonction polynomiale et déterminer son degré.

Dans toute la suite, on identifiera la fonction polynomiale L_n et le polynôme associé.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer $h_n^{(n)}$ et $h_n^{(n+1)}$ en fonction de L_n et L_n'.
   (b) Donner une relation simple entre h_{n+1} et h_n.
   (c) En calculant $h_{n+1}^{(n+1)}$ à l'aide de la formule de Leibnitz, en déduire que :
   $$L_{n+1} = \frac{X}{n+1} L_n' + \left(1 - \frac{X}{n+1}\right) L_n$$
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$, $h_{n+1}'(x) = (n+1)h_n(x) - h_{n+1}(x)$. Puis, en remarquant que $\left(h_{n+1}'\right)^{(n+1)} = \left(h_{n+1}^{(n+1)}\right)'$, montrer la relation :
   $$L_{n+1}' = L_n' - L_n$$
6. En utilisant les différentes résultats obtenus montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad XL_n'' + (1-X)L_n' + nL_n = 0$$
   et que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (n+1)L_{n+1} + (X - 2n - 1)L_n + nL_{n-1} = 0$$

Partie II. Application à un calcul de somme de coefficients binomiaux

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, utiliser la formule de Leibnitz pour calculer les coefficients du polynôme L_n.
2. (a) Soient n un entier naturel et f la fonction définie par :
   $$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x^{n+2} \sin\left(\dfrac{1}{x^{n+1}}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$
   Vérifier que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^{n+1}} = 0$ puis montrer que f admet un développement limité d'ordre $n+1$ en 0. En déduire aussi que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que f' n'a pas de limite finie en 0 puis que f' n'admet pas de développement limité d'ordre 0 en 0.
   Indication : on pourra considérer les suites $(x_p)_p$ et $(x_p')_p$ définies par
   $$x_p = \big(2(p+1)\pi\big)^{-1/(n+1)} \text{ et } x_p' = \big(2p\pi + \pi/2\big)^{-1/(n+1)}$$

1. Edmond Laguerre (1834-1886)

(b) Soient f une fonction de classe C^n au voisinage de 0 et k un entier naturel tel que $k \leq n$. Montrer que f admet un développement limité d'ordre n en 0 et que $f^{(n-k)}$ admet un développement limité à l'ordre k en 0, obtenu en dérivant k fois celui de f.

3. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on considère $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq n$.

   (a) Déterminer le développement limité à l'ordre $n+N$ en 0 de h_n.

   (b) En utilisant la question II.2.(b), en déduire le développement limité à l'ordre N en 0 de $h_n^{(n)}$.

   (c) À l'aide d'un produit de développements limités, montrer qu'on a au voisinage de 0 :

$$L_n(x) = \sum_{p=0}^{N} c_p x^p + o(x^N) \qquad \text{où } \forall p \in [\![0, N]\!] \ , \ c_p = \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n+k}{k} \binom{p}{k}$$

   Indication : pour calculer la partie régulière on pourra utiliser la formule du produit de polynômes.

   (d) En déduire que pour tout entier $p \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n+k}{k} \binom{p}{k} = \begin{cases} (-1)^p \dbinom{n}{p} & \text{si } 0 \leq p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$