PCSI 1 - DEVOIR MAISON N ° 19 **Année scolaire 2017-2018**
A rendre le mardi 29 mai 2018

<u>EXERCICE 1</u> : Étude d'une série

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1+\frac{1}{2^k}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$

1. Donner sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq 2$.
   (b) Etudier la monotonie de la suite (u_n).
3. (a) Etablir que, pour tout réel $x > -1$, on a $\ln(1+x) \leq x$.
   (b) En déduire, (u_n) est majorée.
4. En utilisant les question précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.
   Donner un encadrement de ℓ.
5. On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$.
   Puis que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \ell - u_n \leq \ \ell\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.
   (c) Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1-\mathrm{e}^{-x} \leq x$.
   Conclure quant à la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.
   (d) Donner un équivalent de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ lorsque $n \to +\infty$.

<u>EXERCICE 2</u> : Critère spécial des séries alternées

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs, convergente vers 0.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$.

1. (a) Monter que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
   (b) En déduire que la série $\sum(-1)^n a_n$ est convergente.
   (c) Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|\sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k a_k\right| \leq a_n$
   Indication : discuter suivant la parité de n et utiliser 1.(a)
2. Étudier la nature des séries $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$, en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.
   En déduire un contre-exemple où $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ mais où les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de nature différente.