PCSI1 - DEVOIR SURVEILLE N ° 2 **Année scolaire 2017-2018**
Samedi 16 septembre 2017

Durée du devoir : 1h00.

Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les exercices sont indépendants, on les traitera dans l'ordre souhaité.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 : Questions de cours

1. Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$, $u_2 = 5$ et pour tout n entier naturel non nul : $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
   Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $u_n = 3^n - 2^n$.
2. Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que :
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
3. Soient E, F, G trois ensembles et soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.
   (a) Rappeler la définition de l'application $g \circ f$.
   L'application $f \circ g$ est-elle définie ici ?
   (b) Montrer que :
$$f \text{ et } g \text{ injectives} \Longrightarrow g \circ f \text{ injective}$$
   (c) Montrer que :
$$f \text{ et } g \text{ surjectives} \Longrightarrow g \circ f \text{ surjective}$$
   (d) Montrer que :
$$f \text{ et } g \text{ bijectives} \Longrightarrow g \circ f \text{ bijective}$$

<u>Exercice 2</u> : Un peu de logique

Dans une classe de PCSI, les élèves doivent choisir d'étudier entre 0 et 3 langues vivantes parmi les suivantes : anglais, espagnol, allemand. Au second semestre, ils doivent aussi choisir entre SI (et deviennent des SI-istes) et Chimie (et deviennent des chimistes). On considère les deux propositions suivantes :

$\mathcal{P}$: « Il existe un chimiste qui étudie l'allemand. »

$\mathcal{Q}$: « Si l'élève est un SI-iste, alors il étudie l'anglais et l'espagnol. »

On note Ω l'ensemble des élèves de la classe ; A, E et D les sous-ensembles des élèves qui étudient l'anglais, l'espagnol, l'allemand (respectivement) ; et enfin S et X les sous-ensembles des élèves SI-istes et chimistes (respectivement). On pourra utiliser la lettre e pour désigner un élève (c'est-à-dire un élément générique de E).

On supposera que les ensembles S et X sont non vides.

1. Réécrire les propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ en langage mathématique à l'aide de quantificateurs et d'opérateurs logiques.
2. Réécrire la proposition $\mathcal{Q}$ en langage mathématique à l'aide d'opérations sur des ensembles.
3. Donner, en français, la négation de $\mathcal{P}$ et la négation de $\mathcal{Q}$.
4. Donner, en français, la contraposée et la réciproque de $\mathcal{Q}$.
5. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse (les justifications ne sont pas demandées) :
   (a) Pour prouver que $\mathcal{P}$ est vraie, il est suffisant de prouver que tous les élèves de la classe étudient l'allemand.
   (b) Pour prouver que $\mathcal{P}$ est fausse, il est nécessaire de prouver l'existence d'un chimiste qui n'étudie pas l'allemand.
   (c) Pour prouver que $\mathcal{Q}$ est fausse, il est suffisant de prouver que tous les élèves étudient l'allemand.
   (d) Pour prouver que $\mathcal{Q}$ est vraie, il est nécessaire de prouver que tous les élèves qui n'étudient aucune langue vivante sont des chimistes.