PCSI1 - DEVOIR SURVEILLE N ° 2 **Année scolaire 2017-2018**
Samedi 23 septembre 2017

Durée du devoir : 2h00.

Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les parties du problème ne sont pas indépendantes.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

<u>PROBLEME</u> : Fonctions indicatrices

Soit E un ensemble non vide.

Pour toute partie A de E, on définit *l'application caractéristique (ou indicatrice) de* A, notée $\mathbb{1}_A$, par :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_A : & E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & x & \longmapsto & \mathbb{1}_A(x) \end{array}$$

avec $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$

Dans tout ce qui suit, on notera $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E.

On rappelle les propriétés suivantes des applications caractéristiques, pour A et B des parties de E :

1. $A = B \Longleftrightarrow \mathbb{1}_A \equiv \mathbb{1}_B \Longleftrightarrow \forall x \in E,\ \mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x)$.
2. $\mathbb{1}_{\overline{A}} \equiv 1 - \mathbb{1}_A$.
3. $\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_A \equiv \mathbb{1}_A$.
4. $\mathbb{1}_{A\cap B} \equiv \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.
5. $\mathbb{1}_{A\cup B} \equiv \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$ et si $A \cap B = \emptyset$: $\mathbb{1}_{A\cup B} \equiv \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$.
6. $\mathbb{1}_{A\setminus B} \equiv \mathbb{1}_A \times \big(1 - \mathbb{1}_B\big)$.

Partie I : Différence symétrique

Si A et B sont deux parties de E, on appellera *différence symétrique* de A et B la partie de E suivante :

$$A\Delta B = \big(A \cup B\big)\backslash\big(A \cap B\big)$$

1. Montrer que : $A\Delta B = \big(A\backslash B\big) \cup \big(B\backslash A\big)$.
2. En déduire que : $\mathbb{1}_{A\Delta B} \equiv \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$.
3. Soient A, B et C trois parties de E. En utilisant le résultat de la question précédente, démontrer les propriétés suivantes :
   (a) $A\Delta\big(B\Delta C\big) = \big(A\Delta B\big)\Delta C$.
   (b) $A\Delta B = A\Delta C \Longrightarrow B = C$.
   (c) $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$.

Partie II : Résolution de l'équation $A\Delta X = B$ dans $\mathscr{P}(E)$.

Soient A et B deux parties de E fixées. On définit l'application :

$$\begin{array}{rccl} \Phi_A : & \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ & X & \longmapsto & \Phi_A(X) = A\Delta X \end{array}$$

1. Soit X une partie de E.
   (a) Calculez $A\Delta A$ et $\emptyset\Delta X$.
   (b) Utilisez les résultats de la partie I pour en déduire la valeur de $\Phi_A(\Phi_A(X))$.
2. En déduire, toujours à l'aide de la partie I, que Φ_A est bijective de $\mathscr{P}(E)$ vers $\mathscr{P}(E)$. Déterminer son application réciproque.
3. Déduire de ce qui précède que, pour toutes parties A et B de E fixées, l'équation $A\Delta X = B$ possède une unique solution X partie de E, qu'on exprimera en fonction de A et B.

Partie III : Dénombrement.

Dans cette partie, on suppose que E est un ensemble *fini*. On note $n = \text{Card}(E)$ et $E = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$.

On rappelle que $\{0;1\}^E$ désigne l'ensemble des applications définies sur E et à valeurs dans $\{0;1\}$.

1. (a) Donner le cardinal de l'ensemble $\{0;1\}^E$ (la démonstration n'est pas demandée).
   (b) On considère l'application $\psi : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \{0;1\}^E$ définie par :
   $$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad \psi(A) = \mathbb{1}_A$$
   Montrer que ψ est bijective de $\mathcal{P}(E)$ vers $\{0;1\}^E$.
   (c) Retrouver alors la formule du cours pour Card $\big(\mathcal{P}(E)\big)$.

2. (a) Montrer que si A est une partie de E, alors :

$$\mathrm{Card}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_A(x_k) \quad \Big(\text{notation pour } \mathbb{1}_A(x_1) + \mathbb{1}_A(x_2) + \cdots + \mathbb{1}_A(x_n)\Big)$$

(b) Utiliser cette formule pour retrouver la formule du cours pour $\mathrm{Card}(A \cup B)$, pour A et B deux parties de E.

(c) Utiliser cette formule pour calculer $\mathrm{Card}\big((A\Delta B)\Delta C\big)$, pour A, B et C trois parties de E.

Partie IV : Différence symétrique de n ensembles.

On réutilise ici le résultat de la question II.3.(a) : si A, B, C sont des parties de E, on a $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

C'est la propriété *d'associativité*. On peut donc utiliser la notation $A\Delta B\Delta C$, sans préciser les parenthèses.

Plus généralement, si $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ est une famille finie de parties de E on peut définir $A_1\Delta A_2\Delta \ldots \Delta A_n$ sans préciser les parenthèses.

Si x et y sont deux nombres entiers relatifs, on dira qu'ils sont *congrus modulo* 2, et on le notera $x = y \pmod 2$, lorsque 2 divise $x - y$.

Si f et g sont deux applications de E vers $\mathbb{Z}$, on dira que $f \equiv g \pmod 2$ lorsque : $\forall x \in E$, $f(x) = g(x) \pmod 2$.

1. Montrer que :

$$\mathbb{1}_{A_1\Delta A_2\Delta\ldots\Delta A_n} \equiv \mathbb{1}_{A_1} + \mathbb{1}_{A_2} + \cdots + \mathbb{1}_{A_n} \pmod 2$$

2. En déduire une condition nécessaire et suffisante très simple sur $x \in E$, pour que $x \in A_1\Delta A_2\Delta \ldots \Delta A_n$, en fonction de l'appartenance de x aux parties A_1, A_2, ..., A_n.