PCSI1 - DEVOIR SURVEILLE N ° 3 **Année scolaire 2017-2018**
Samedi 21 octobre 2017

Durée du devoir : 2h00.

Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les parties du problème ne sont pas indépendantes.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

EXERCICE 1 : Trigonométrie et racines de l'unité

Soit $\omega = \exp(2i\pi/11)$. On pose $S = \omega + \omega^4 + \omega^9 + \omega^5 + \omega^3$ et $T = \omega^2 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^{10}$.

1. (a) Justifier les égalités : $\omega^{11} = 1$ et $\overline{\omega} = \dfrac{1}{\omega}$.

   (b) En déduire que S et T sont conjugués.

2. (a) Comparer $\sin\left(\dfrac{6\pi}{11}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{11}\right)$.

   (b) En déduire que la partie imaginaire de S est positive.

3. Démontrer que $S + T = -1$ et $S \times T = 3$.

4. En déduire la valeur de S et celle de T.

5. Par définition $\tan\left(\dfrac{3\pi}{11}\right) = \dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{11}\right)}{\cos\left(\dfrac{3\pi}{11}\right)}$.

   (a) À l'aide des formules d'Euler, montrer que : $i\tan\left(\dfrac{3\pi}{11}\right) = \dfrac{\omega^3 - 1}{\omega^3 + 1} = -\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(-\omega^3)^k$.

   (b) Vérifier que $4i\sin\left(\dfrac{2\pi}{11}\right) = 2(\omega - \omega^{10})$.

   (c) En déduire que $\tan\left(\dfrac{3\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\dfrac{2\pi}{11}\right) = i(T - S) = \sqrt{11}$.

<u>EXERCICE 2</u> : Calculs de sommes

Soit z un complexe différent de 1, et n un entier supérieur ou égal à 2, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} kz^k$$

1. (a) Démontrer que $(1-z)S_n + nz^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} z^k$

   (b) En déduire que $S_n = \dfrac{z-(n+1)z^{n+1}+nz^{n+2}}{(1-z)^2}$

2. Dans cette question on propose une autre méthode pour simplifier S_n.

   (a) Justifier l'égalité suivante : $S_n = \displaystyle\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{k=s}^{n} z^k\right)$

   (b) Retrouver ainsi la formule de 1.(b).

3. (a) Calculer S_n lorsque $z = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}$.
   On donnera le résultat sous la forme $re^{i\theta}$ où r et θ sont réels.

   (b) En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$