

Durée du devoir : 2h00.

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

EXERCICE 1 : Une équation différentielle

On souhaite déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables et telles que :

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad (*)$$

1. Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R}_+^* et qui vérifie la propriété (*).

(a) Montrer que f est deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* et que :

$$\forall x > 0, \quad x^2 \cdot f''(x) + f(x) = 0$$

(b) On utilise le changement de variable $t = \ln x$. On pose donc pour tout $t \in \mathbb{R}$: $y(t) = f(e^t)$. Montrer que y est solution sur \mathbb{R} de :

$$y'' - y' + y = 0$$

(c) En déduire une expression de $y(t)$ en fonction de t .

(d) Montrer qu'il existe un couple de réels $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \sqrt{x} \cdot \left(\lambda \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3} \cdot \ln(x)}{2}\right) + \mu \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3} \cdot \ln(x)}{2}\right) \right)$$

2. Conclure que les fonctions f dérivables sur \mathbb{R}_+^* et vérifiant la propriété (*) sont les fonctions de la forme :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = C \cdot \sqrt{x} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3} \cdot \ln(x)}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$$

où C est une constante réelle.

EXERCICE 2 : Une équation intégrale

Dans tout l'exercice on fixe $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On définit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t) dt$$

- (a) Montrer que f est définie et dérivable sur \mathbb{R} et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^x \cos(t-x)g(t) dt$$

- (b) Montrer que f est une solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$.
2. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$.