PCSI1 - DEVOIR SURVEILLE N ° 5 **Année scolaire 2017-2018**
Samedi 16 décembre 2017

Durée du devoir : 2h00.

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

<u>EXERCICE 1</u> : Une suite récurrente d'ordre 1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 1$.
2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq u_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Dans la dernière question, on pose : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n^2$.

4. (a) Exprimer v_n en fonction de n.

   On pourra calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(v_{k+1} - v_k\right)$

   (b) En déduire la valeur de ℓ.

EXERCICE 2 : Une suite récurrente d'ordre 3

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} v_0 = 0, \quad v_1 = 0, \quad v_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+3} = -v_{n+2} + 5v_{n+1} - 3v_n \end{cases}$$

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On note $J(a,b) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.
   À l'aide de la formule du binôme, déterminer $J(a,b)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Pour $n \geq 2$, on pose : $V_n = \begin{pmatrix} v_n \\ v_{n-1} \\ v_{n-2} \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :
   $$\forall n \geq 2, \qquad V_{n+1} = NV_n.$$
   En déduire la valeur de V_n en fonction de V_2 et N.
3. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (b) Montrer que $N = PJ(1,-3)P^{-1}$.
   En déduire N^n en fonction de P, P^{-1}, $J(1,-3)$ et $n \in \mathbb{N}$.
4. Déduire des résultats des questions précédentes la valeur de v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
5. Donner une fonction Python permettant de **vérifier** le résultat obtenu dans le cas $n = 15$.

EXERCICE 3 : Matrices stochastiques

On dira qu'une matrice $A = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique lorsque :

(i) $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{ij} \geq 0$

(ii) $\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$

1. Soit $A = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stochastique.
   Montrer que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{ij} \in [0,1]$.
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ et $\alpha + \beta = 1$.
   Montrer que si A et B sont stochastiques alors la matrice $\alpha A + \beta B$ l'est aussi.
3. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que si A et B sont stochastiques aors la matrice AB l'est aussi.