**PCSI1 - DEVOIR SURVEILLE N ° 6** **Année scolaire 2017-2018**
**Samedi 26 janvier 2017**

*Durée du devoir : 4h00.*

**Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les parties du problème ne sont pas indépendantes.**

*Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

## PROBLEME : Autour des fonctions hyperboliques

Dans tout ce problème, on notera sh la fonction sinus hyperbolique et ch la fonction cosinus hyperbolique.
On définit aussi la fonction tangente hyperbolique, notée th par :

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}$$

### Partie A. Fonction tangente hyperbolique

1. Montrer que la fonction th est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est continue et impaire sur cet intervalle.
2. *On admet que th est dérivable sur* $\mathbb{R}$.
   Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)^2} = 1 - \mathrm{th}(x)^2$
3. Montrer que th est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle $I$ à déterminer.
4. On note argth la fonction réciproque de th.
   Donner une expression de $\mathrm{argth}(y)$ pour tout $y \in I$, à l'aide de la fonction ln.
5. Montrer que $\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + o(x^4)$.
   En déduire que $\mathrm{th}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^5)$.
   *On pourra écrire le $DL_5(0)$ de $\mathrm{sh}(x)$ sous forme normalisée.*

### Partie B. Étude d'une fonction

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x.\operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$

6. Etudier la parité de $f$.
7. (a) À l'aide d'un DL, donner un équivalent de la fonction sh en 0 et en déduire les limites de $f$ en $+\infty$ et $-\infty$.
   (b) Déterminer la limite de $f$ en 0. $f$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
8. *On admet que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.*
   Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ : $f'(x) = \left[\operatorname{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right] \times \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)$
9. Montrer que pour tout $t > 0$, $\operatorname{th}(t) < t$.
10. En déduire le tableau de variations de $f$.
11. Donner le $DL_4(0)$ de la fonction $t \longmapsto \dfrac{\operatorname{sh}(t)}{t}$.
12. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, $f$ a un DL de la forme

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

   où $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ sont cinq réels qu'on précisera.
13. Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R}^* \longmapsto f\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}$ se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une fonction continue notée $F$.
    *On admettra dans toute la suite que $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.*

### Partie C. Une équation différentielle

On considère l'équation différentielle $(E)$ suivante, qu'on va résoudre sur différents intervalles

$$xy' + y = \operatorname{ch}(x)$$

14. Résoudre sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $(E)$.
15. Donner sans justification les solutions de l'équation différentielle $(E)$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^*$.
16. Justifier que la fonction $F$ (définie dans la question B.13.) est l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui soit solution de l'équation différentielle $(E)$ sur $\mathbb{R}$.

### Partie D. Étude d'une suite

17. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = \dfrac{n+1}{n}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$. On la note $u_n$.

On définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qu'on va étudier dans les questions qui suivent.

18. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
19. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ quand $n$ tend vers $+\infty$.
20. En utilisant la question B.12., déterminer un équivalent de $u_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**Partie E. Une fonction définie par une intégrale**

Pour $x > 0$, on pose $J(x) = \displaystyle\int_{x/2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

22. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $\mathrm{sh}(2x) = 2.\,\mathrm{sh}(x).\,\mathrm{ch}(x)$
23. Montrer que $J$ est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et que :
$$\forall x > 0, \quad J'(x) = f(x) \times \left[1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$
24. En déduire le signe de $J'$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ; on exprimera le (ou les) zéro(s) de $J'$ à l'aide de la fonction ln.
25. (a) Montrer que, pour tout $x \geq 0$ : $\mathrm{sh}(x) \geq \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{2}$.
    (b) En déduire pour tout $x > 0$ : $\forall t \in \left[\dfrac{x}{2}, x\right]$, $f(t) \geq \dfrac{x}{2}\left(\mathrm{e}^{1/x} - 1\right)$.
    (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} J(x) = +\infty$.
26. (a) Montrer que, pour tout $x > 0$ : $\mathrm{sh}(x) \geq x$
    (b) En déduire que pour tout $x > 0$, $J(x) \geq \dfrac{x}{2}$. Donner alors $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} J(x)$.
    (c) Donner un équivalent de $\mathrm{sh}(x) - x$ lorsque $x \to 0$. En déduire qu'il existe $\delta > 0$ tel que :
$$\forall x \in ]0, \delta], \quad \mathrm{sh}(x) \leq x + \frac{x^3}{4}$$
    (d) Montrer alors que, pour tout $x \in [1/\delta, +\infty[$ : $J(x) \leq \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2x}$.
    Conclure que la courbe représentative de $J$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ et donner la position de la courbe par rapport à son asymptote.
27. Tracer l'allure de la courbe représentative de $J$.
    *On donne pour le tracé* $\dfrac{1}{\ln(2+\sqrt{3})} \approx 0,76$ *et* $J\left(\dfrac{1}{\ln(2+\sqrt{3})}\right) \approx 0,65$, *à* $10^{-2}$ *près.*