PCSI1 - DEVOIR SURVEILLE N ° 7 **Année scolaire 2017-2018**
Samedi 17 mars 2018

Durée du devoir : 2h00.

Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les trois exercices sont indépendants.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 :

1. La famille de vecteurs $\big((1,2,1),(2,1,-1),(1,-1,-2)\big)$ est-elle libre ?
2. On pose :

$$\mathbb{F} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ -y+2z = x \text{ et } y = y \text{ et } x+y-z = z\big\}$$

$$\mathbb{G} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ -y+2z = -2x \text{ et } y = -2y \text{ et } x+y-z = -2z\big\}$$

Montrer que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, et donner une base de $\mathbb{F}$ et une base de $\mathbb{G}$.

<u>Exercice 2</u> : Sous-espaces vectoriels supplémentaires

On note :

$$\mathbb{E} = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} ;\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} + 2u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 0 \right\}$$

et la suite stationnaire égale à 0 est notée $(0)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que $\mathbb{E}$ est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. (a) Montrer qu'il existe exactement trois suites **géométriques**, de **premier terme égal à 1**, **appartenant à** $\mathbb{E}$ et que ce sont les suivantes : $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big((-2)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathbb{E}$.
      i. On suppose qu'il existe $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que :
      $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda + \mu.(-1)^n + \nu.(-2)^n$$
      Montrer que le triplet (λ, μ, ν) est déterminé de manière unique par les valeurs de u_0, u_1 et u_2.
      ii. À partir de ces formules, démontrer qu'il existe $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que :
      $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda + \mu.(-1)^n + \nu.(-2)^n$$
      iii. En déduire que $\Big((1)_{n\in\mathbb{N}}, \big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}, \big((-2)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}\Big)$ est une base de $\mathbb{E}$.
3. On note $\mathbb{F}$ l'ensemble des suites réelles 2-périodiques, c'est-à-dire :
   $$\mathbb{F} = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} ;\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_n \right\}$$
   (a) Montrer que $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{E}$ et en donner une base.
   Indication : on pourra reconnaître des suites usuelles.
   (b) On pose $\mathbb{G} = \mathrm{Vect}\left(\left((-2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$. Montrer simplement que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{E}$.

<u>Exercice 3</u> : Dérivées successives

On définit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$.

1. (a) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer les variations de f et de f' sur $\mathbb{R}$.
   Monter que f possède un unique point fixe, noté α, et que $\alpha \in \left[\dfrac{1}{3}, 1\right]$.
   Chercher le $DL_3(0)$ de f en 0.
   Tracer l'allure de la courbe de f à l'aide de ces renseignements.

   (b) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
   $$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{1+u_n+u_n^2}$$
   Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{1}{3} \leq u_n \leq 1$

   (c) Montrer qu'il existe une constante $C \in]0, 1[$ telle que :
   $$\forall x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right], \quad \left|f'(x)\right| \leq C$$
   En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq C^n$. Conclusion ? Proposer un programme `Python` qui calcule une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

2. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x+x^2)^{n+1}}$$

   (b) Vérifier que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} = (1+X+X^2)P_n' - (n+1)(2X+1)P_n$$

   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note d_n le coefficient dominant de P_n. Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n = (-1)^n(n+1)!$$

3. (a) Rappeler le théorème de Leibnitz.

   (b) En remarquant que $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1+x+x^2)f(x) = 1$, établir que pour entier naturel n supérieur ou égal à 2 :
   $$P_n + n(2X+1)P_{n-1} + n(n-1)(1+X+X^2)P_{n-2} = 0$$

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul : $P_n' = -(n+1)nP_{n-1}$

4. (a) Soit β un réel.
   Montrer que si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, et si β est racine de P_n et de P_{n-1}, alors β est aussi racine de P_{n-2}.
   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les polynômes P_n et P_{n+1} n'ont aucune racine **réelle** commune.

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les racines **réelles** de P_n sont toutes simples.