PCSI1 - DEVOIR SURVEILLE N ° 8 **Année scolaire 2017-2018**
Samedi 2 juin 2018

Durée du devoir : 4h00.

Les calculatrices ne sont pas autorisées.
Le sujet est constitué de quatre exercices indépendants ; on peut les traiter dans n'importe quel ordre (mais il est conseillé de tous les aborder).

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

<u>EXERCICE 1</u> : Déterminant de Gram d'une famille de vecteurs

Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(.|.)$

1. Soient u et v deux vecteurs quelconques de $\mathbb{E}$. On note :
$$g(u,v) = \begin{vmatrix} (u|u) & (u|v) \\ (v|u) & (v|v) \end{vmatrix}$$
Montrer que $g(u,v) \geq 0$.
À quelle condition y a-t-il égalité ?
2. Soient u, v et w trois vecteurs quelconques de $\mathbb{E}$. On note :
$$g(u,v,w) = \begin{vmatrix} (u|u) & (u|v) & (u|w) \\ (v|u) & (v|v) & (v|w) \\ (w|u) & (w|v) & (w|w) \end{vmatrix}$$
   (a) On suppose que w est orthogonal à u et v.
   Exprimer le réel $g(u,v,w)$ en fonction des réels $g(u,v)$ et $\|w\|$.
   (b) On suppose que w est combinaison linéaire de u et v.
   Vérifier que $g(u,v,w) = 0$
   (c) Justifier qu'il existe deux uniques vecteurs t et n dans $\mathbb{E}$ tels que : $w = t + n$, t est combinaison linéaire de u et v, et n est orthogonal à u et v.
   Montrer ensuite que :
$$g(u,v,w) = g(u,v) \times \|n\|^2$$
   et en déduire l'équivalence :
$$(u,v,w) \text{ est libre} \iff g(u,v,w) \neq 0$$

EXERCICE 2 : Tirages dans une urne

Dans cet exercice, a et b désignent des entiers naturels tous deux non nuls et on note $N = a + b$.

On considère une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires, dans laquelle on effectue des tirages successifs, au « hasard » et « avec remise » d'une boule, en procédant de la façon suivante :

• lorsque la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne avant de procéder au tirage suivant,

• lorsque la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne, mais remplacée dans cette urne par une boule blanche et on procède alors au tirage suivant.

On note $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ l'espace probabilisé adéquat et $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'une première boule blanche.

1. Préciser soigneusement l'ensemble des valeurs prises par la variable Y.
2. Pour tout k compris entre 1 et $b+1$, calculer la valeur de la probabilité $\mathbb{P}(Y = k)$.
3. (a) Vérifier que

$$\mathbb{P}(Y = b+1) = \frac{b!}{N^b}$$

   (b) Soit k entier compris entre 1 et b. Montrer que :

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{b!}{(b-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{b!}{(b-k)!N^k}$$

4. Soit M un entier naturel non nul et $a_0, a_1, \ldots, a_M$ une famille de réels. Établir que :

$$\sum_{k=1}^{M} k(a_{k-1} - a_k) = \left(\sum_{k=0}^{M-1} a_k\right) - M a_M$$

5. En déduire que $\mathbb{E}(Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{b} \frac{b!}{(b-k)!N^k}$.

EXERCICE 3 : Espaces vectoriels euclidiens

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et $\mathbb{E} = \mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel réel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n. On pose :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{E}^2, \quad \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

Soit $\Delta : E \longrightarrow E$ définie par :

$$\forall P \in E, \quad \Delta(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'$$

où l'on note respectivement P' ou $P'(X)$, ainsi que P'' ou $P''(X)$ les dérivées premières et deuxièmes de $P = P(X)$.

1. Vérifier que l'application $\langle . , . \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{E}$.
2. (a) Vérifier que Δ est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel E.
   (b) Écrire la matrice de Δ relativement à la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$.
   En déduire $\mathrm{rg}(\Delta)$.
   Δ est-il un automorphisme de $\mathbb{E}$?

   Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $\lambda_k = k(k+1)$.

   (c) Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
   Montrer que l'endomorphisme $\Delta - \lambda_k.\mathrm{id}_{\mathbb{E}}$ est non injectif.
   En déduire l'existence d'un polynôme P_k de $\mathbb{E}$ non nul et tel que :
   - P_k est de degré k,
   - le coefficient de X^k est 1,
   - $\Delta(P_k) = \lambda_k P_k$

   (d) Montrer que pour tous P et Q dans E, on a : $\langle \Delta(P), Q \rangle = \langle P, \Delta(Q) \rangle$.
   Indication : on pourra procéder par intégration par parties.

   (e) En déduire que pour tout $(k, h) \in [\![0, n]\!]^2$ tel que $k \neq h$, on a : $\langle P_k, P_h \rangle = 0$.
   Rappel : P_k a été définie à la question 2.(c)

   (f) Conclure que $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{E}$ et donner la matrice de Δ dans cette base. Que remarquez-vous ?

EXERCICE 4 : Séries numériques

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$b_n = n(a_n - a_{n+1}),\ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ \text{ et } \ B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

1. On prend **dans cette question**, pour tout $n \geq 1$, $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
   (a) vérifier que la série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge et calculer sa somme.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} nx^{n-1}$ converge si, et seulement si, $x \in]-1,1[$.
   Indication : utiliser un résultat de croissances comparées.
   En remarquant que $x^n = (n+1)x^n - nx^n$, vérifier que si $x \in]-1,1[$: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$
   (c) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ converge et que sa somme est égale à 2.
2. On prend **dans cette question**, $a_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$, $n \geq 2$ et $a_1 = 0$.
   (a) Etudier la monotonie et la convergence de la suite $(a_n)_{n\geq 2}$.
   (b) À l'aide d'un comparaison à une intégrale, montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ diverge.
   Indication : quelle est la dérivée de $\ln(\ln t)$ *?*
   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n$.
   (d) Déterminer un équivalent de b_n et en déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ diverge ?
3. On suppose **dans cette question** que la série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs.
   (a) Pour tout entier naturel n non nul, on note $u_n = \sum\limits_{p=n+1}^{2n} a_p$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ na_{2n} \leq u_n$
   (b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} na_{2n} = 0$
   (c) Démontrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$
   (d) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ converge.
   (e) A-t-on $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$?
4. On suppose **dans cette question** que la série $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et de limite nulle.
   (a) Vérifier que $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ m \leq n,\ B_n \geq A_m - ma_{n+1}$
   (b) En déduire que $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge.
   (c) Peut-on en déduire que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$?