Durée du devoir : 4h00.

Les calculatrices collège sont autorisées.

Les quatre exercices sont indépendants.

Les parties « analyse-probabilités » (exercices 1 et 2) et « algèbre » (exercices 3 et 4) sont à rendre sur des copies différentes.

ANALYSE-PROBABILITÉS

Questions de cours :

1. Énoncer et démontrer le théorème des accroissements finis.
2. Montrer que si z et z' sont deux nombres complexes, alors $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

EXERCICE 1 : Calcul d'une intégrale

On considère l'application

$$f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. **Étude de l'application f.**
   (a) Montrer soigneusement que f est continue sur $[0; +\infty[$ et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
   (b) À l'aide d'un développement limité, montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = -\dfrac{1}{2}$ et en déduire que f est de classe C^1 sur $[0; +\infty[$. Préciser la valeur de $f'(0)$.
   (c) Dresser le tableau de variations de f sur $[0; +\infty[$. Préciser les limites aux bornes.
2. **Un développement en série.**
   (a) Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0; 1]$:

$$\frac{1}{1+t} = \left(\sum_{k=0}^{N} (-1)^k t^k \right) + \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}$$

   (b) En déduire, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0; 1]$:

$$\ln(1+x) = \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \right) + J_N(x)$$

   où on a noté $J_N(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t} \, \mathrm{d}t$.

   (c) Établir, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0; 1]$: $\big|J_N(x)\big| \leq \dfrac{x^{N+2}}{N+2}$

   (d) En déduire que, pour tout $x \in [0; 1]$, la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ converge et que :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

3. **Égalité d'une intégrale et d'une somme de série.**
   (a) Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0;1]$:
$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \leq \frac{x^{N+1}}{N+2}$$
   (b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge et que : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.
   (c) Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:
$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2} \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2} \end{cases}$$
   (d) On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}$.

EXERCICE 2 : Étude d'un dépassement de seuil

On dispose d'une urne contenant deux boules, l'une numérotée 1, l'autre 2. On effectue, dans cette urne, une succession de tirages au hasard d'une boule, en notant le numéro obtenu, la boule tirée étant remise dans l'urne après chaque tirage.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro tiré au rang n. On a donc : $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{1}{2}$. De plus les variables $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ sont mutuellement indépendantes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$; S_n désigne donc la somme des numéros obtenus au cours des n premiers tirages.

Pour $N \in \mathbb{N}^*$ donné, on considère la variable aléatoire T_N égale au rang n où, *pour la première fois*, on a $S_n > N$. Par exemple si $N = 5$ et si les premiers numéros tirés sont 2, 1, 2, 1, 1, ... alors T_5 prend la valeur 4. De même, toujours si $N = 5$, si les premiers numéros tirés sont 2, 2, 2, 1, 2, ... alors T_5 prend la valeur 3.

1. **Préliminaires.**
   (a) On considère la suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_1 = \frac{5}{6}$, $v_2 = \frac{11}{12}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+2} = \frac{1}{2}(v_{n+1} + v_n)$. Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \frac{8}{9} + \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$
   (b) On considère la suite réelle $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $w_1 = \frac{3}{2}$, $w_2 = \frac{9}{4}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_{n+2} = \frac{1}{2}(w_{n+1} + w_n) + 1$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définie par $v_n = w_n - \frac{2n}{3}$, vérifie les hypothèses de la question précédente et en déduire la valeur de w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
2. **Exemples**
   (a) Déterminer les lois de T_1 et T_2 ainsi que leurs espérances et variances.
   On pourra utiliser un arbre.
   (b) Déterminer $T_5(\Omega)$.
   (c) Sans justifier vos calculs, dresser dans un tableau les probabilités $\mathbb{P}(T_5 = i, X_1 = j)$ pour $i \in [\![3, 6]\!]$ et $j \in \{1, 2\}$.
   Il faut en particulier trouver que $\mathbb{P}(T_5 = 5, X_1 = 2) = \frac{1}{16}$ *et* $\mathbb{P}(T_5 = 4, X_1 = 1) = \frac{1}{4}$.
   (d) Déterminer la loi de T_5, calculer son espérance et sa variance.

3. **Calcul de l'espérance de T_N**

On revient au cas général où $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 2$.

(a) Déterminer la plus petite et la plus grande valeur de T_N dans le cas où N est pair. Même question dans le cas où N est impair.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 3$. On rappelle que $S_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} X_n$. On pose aussi $S'_k = \displaystyle\sum_{n=2}^{k} X_n$.

On admettra que le couple (S'_{k-1}, S'_k) a même loi (conjointe) que le couple (S_{k-2}, S_{k-1}).

Justifier que $(X_1 = 2) \cap (T_{N+2} = k) = (X_1 = 2) \cap (S'_k > N) \cap (S'_{k-1} \leq N)$.

En déduire que $\mathbb{P}\big((X_1 = 2) \cap (T_{N+2} = k)\big) = \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(T_N = k-1)$.

Conclure que $\mathbb{P}\big(T_{N+2} = k\big) = \dfrac{1}{2}\mathbb{P}\big(T_{N+1} = k-1\big) + \frac{1}{2}\mathbb{P}\big(T_N = k-1\big)$.

Vérifier que cette formule est encore valable si $k = 1$ ou $k = 2$.

(c) Vérifier les égalités (on justifiera soigneusement les bornes des sommes) :

$$\mathbb{E}(T_{N+2}) = \sum_{k=1}^{N+3} k\mathbb{P}\big(T_{N+2} = k\big) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(T_N) = \sum_{k=1}^{N+2} k\mathbb{P}\big(T_N = k\big)$$

Prouver ensuite l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{N+3} k\mathbb{P}\big(T_N = k-1\big) = \mathbb{E}(T_N) + 1$

En déduire l'égalité : $\mathbb{E}(T_{N+2}) = \dfrac{1}{2}\Big(\mathbb{E}(T_{N+1}) + \mathbb{E}(T_N)\Big) + 1$

(d) A l'aide du préliminaire, montrer qu'on a : $\mathbb{E}(T_N) = \dfrac{6N+8}{9} + \dfrac{1}{9}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^N$

Quelle est la limite de la suite de terme général $\dfrac{\mathbb{E}(T_N)}{N}$? Ce résultat est-il plausible ?

ALGÈBRE

Questions de cours :

1. Enoncer et démontrer les formules de l'angle de moitié.
2. Montrer qu'une application linéaire est injective si, et seulement si, son noyau est réduit au vecteur nul.

EXERCICE 3 : Matrices stochastiques

Soit $r \in \mathbb{N}$ tel que $r \geq 2$. Une matrice $A = (a_{i,j}) \in M_r(\mathbb{R})$ est dite stochastique lorsqu'elle vérifie les deux conditions suivantes :

(i) pour tout $(i,j) \in (\{1, \cdots, r\})^2$, $a_{i,j} \in [0,1]$,

(ii) pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$, on a $\displaystyle\sum_{j=1}^{r} a_{i,j} = 1$.

On note S_r l'ensemble des matrices stochastiques de $M_r(\mathbb{R})$.
On dira que la matrice A^n a une limite finie si tous les coefficients de A^n admettent une limite. La limite de A^n sera donc la matrice des limites des coefficients.

1. Montrer que le produit de deux éléments de S_2 est dans S_2.
2. On pose $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et on note I_2 la matrice identité de $M_2(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $A^2 = aA + bI_2$.
   (b) Montrer qu'il existe deux suites de réels (a_n) et (b_n) telles que l'on ait :
   $$A^n = a_n A + b_n I_2 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$
   (c) Que peut-on dire de la suite $(a_n + b_n)$?
   (d) En déduire que pour tout entier n strictement positif $a_{n+1} = -\frac{1}{6}a_n + 1$ et $b_{n+1} = -\frac{1}{6}b_n + \frac{1}{6}$.
   (e) En déduire l'expression de a_n en fonction de n. Exprimer de même b_n en fonction de n.
   (f) En déduire l'expression de A^n en fontion de n, de A et de I_2.
   (g) Montrer que A^n admet une limite que l'on déterminera quand n tend vers l'infini. Nous la noterons A^∞. Donner l'expression A^∞ en fonction de A et de I_2 et montrer que $A^\infty \in S_2$.

3. On pose $B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$.

   (a) Vérifier que $B \in S_3$.

   (b) Determiner les réels λ tels que $\det(B - \lambda I) = 0$. On les notera $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

   (c) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que B soit la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donner l'expression de $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

   (d) Pour la suite, on prendra $\lambda_1 = \frac{5}{21}$, $\lambda_2 = \frac{4}{9}$ et $\lambda_3 = 1$. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, déterminer une base de $\ker(f - \lambda_i id)$. On devra trouver ε_i une base de $\ker(f - \lambda_i id)$.

   (e) On prendra pour la suite $\varepsilon_1 = (7, -9, 7)$, $\varepsilon_2 = (0, 0, 1)$ et $\varepsilon_3 = (1, 1, 1)$. Notons $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (f) Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On la notera P.

   (g) Déterminer P^{-1}.

   (h) Soit D la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$. Donner l'expression de D (vous justifierez votre résultat).

   (i) Montrer que $B^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (j) En déduire que B^n admet une limite que l'on déterminera quand n tend vers l'infini. Nous la noterons B^∞. Montrer que $B^\infty \in S_3$.

EXERCICE 4 : Espaces euclidiens

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On pose, pour tout $(P, Q) \in E^2$:

$$(P \mid Q) = P(1)Q(1) + \int_0^1 P'(t)Q'(t)\,dt.$$

1. Prouver que ceci définit un produit scalaire sur E.
2. A l'aide du procédé de Gram-Schmidt, construire une base orthonormale (R_0, R_1) de $\mathbb{R}_1[X]$ à partir de la base canonique $(1, X)$.
3. On note f le projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}_1[X]$. Déterminer $f(X^2)$.
4. En déduire la distance de X^2 au sous-espace $\mathbb{R}_1[X]$.