Correction DM13

1. $U_0 = 1$ donc $\boxed{L_0 = 1}$

$U_1 = X^2 - 1$ donc $L_1 = \frac{1}{2} 2X = \boxed{X}$

$U_2 = (X^2-1)^2$ donc $L_2 = \frac{1}{8}\left(4X(X^2-1)\right)' = \frac{1}{8}\left(4(X^2-1) + 8X^2\right)$

$$\boxed{L_2 = \frac{1}{2}(3X^2 - 1)}$$

2. $\deg U_n = 2n$ donc $\deg U_n^{(n)} = 2n - n = n$

donc $\boxed{\deg L_n = n}$

Le coefficient dominant de U_n est 1

donc celui de $U_n^{(n)}$ est $2n(2n-1) \dots (2n-n+1) = \frac{(2n)!}{n!}$

donc celui de L_n est $\boxed{\frac{1}{2^n} \times \binom{2n}{n}}$

3. On a $U_n(-X) = U_n(X)$

On dérive n fois : $(-1)^n . U_n^{(n)}(-X) = U_n^{(n)}(X)$

donc $\boxed{L_n(-X) = (-1)^n . L_n(X)}$

4. (a) $U_n = (X-1)^n . (X+1)^n$ donc $(X-1)^n \mid U_n$ et $(X-1)^{n+1} \nmid U_n$

donc 1 est racine de U_n d'ordre de multiplicité n.

Donc $\boxed{\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ U_n^{(k)}(1) = 0}$ et $U_n^{(n)}(1) \neq 0$

De même : $\boxed{\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ U_n^{(k)}(-1) = 0}$

4.(b) Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ on note $H(k)$ le prédicat :

" $U_n^{(k)}$ admet au moins k racines distinctes dans $]-1,1[$ "

Pour $k=0$ il n'y a rien à démontrer.

Supposons $H(k)$ vrai à un rang $k \in [\![0, n-2]\!]$ fixé.

$U_n^{(k)}$ admet au moins k racines distinctes dans $]-1,1[$

notées : $\underbrace{-1}_{=\alpha_0} < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k < \underbrace{1}_{=\alpha_{k+1}}$ (au moins $k+2$ racines distinctes dans $[-1,1]$)

Pour $i \in [\![0, k]\!]$:

$U_n^{(k)}$ est continue sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ et dérivable sur $]\alpha_i ; \alpha_{i+1}[$

(puisque c'est un polynôme)

De plus $U_n^{(k)}(\alpha_i) = U_n^{(k)}(\alpha_{i+1}) = 0$ (même si $i=0$ ou k d'après 4.(a))

Donc d'après le théorème de Rolle :

$\exists\, \beta_i \in]\alpha_i ; \alpha_{i+1}[\, ; \; U_n^{(k+1)}(\beta_i) = 0$

Donc $U_n^{(k+1)}$ s'annule au moins en $\beta_0, \dots, \beta_k$ tels que :

$\underbrace{-1}_{\alpha_0} < \beta_0 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \dots < \beta_{k-1} < \alpha_k < \beta_k < \underbrace{1}_{\alpha_{k+1}}$

Donc $U_n^{(k+1)}$ s'annule au moins $k+1$ fois dans $]-1,1[$

Donc $H(k+1)$ est vrai.

Par récurrence finie : $H(k)$ est vrai pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

4.(c) Donc $U_n^{(n-1)}$ admet au moins $n-1$ racines distinctes dans $]-1,1[$ et admet aussi -1 et 1 pour racine. Cela fait au moins $n+1$ racines distinctes dans $[-1,1]$.
En appliquant le théorème de Rolle entre deux racines consécutives, on obtient que $U_n^{(n)}$ a au moins n racines distinctes dans $]-1,1[$.
Donc L_n a au moins n racines distinctes dans $]-1,1[$.
Comme $\deg(L_n)=n$ on est sûr que L_n n'a pas d'autres racines dans $\mathbb{C}$.

Donc $\boxed{\text{$L_n$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$ et toutes ses racines sont dans $]-1,1[$.}}$

5.(a) D'après la formule de Leibniz on a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n^{(n)}(X)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[(X+1)^n\right]^{(k)}\times\left[(X-1)^n\right]^{(n-k)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times\frac{n!}{(n-k)!}(X+1)^{n-k}\times\frac{n!}{k!}(X-1)^{k}$$

$$=n!\times\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\cdot(X+1)^{n-k}\cdot(X-1)^{k}$$

Donc $$\boxed{L_n(X)=\frac{1}{2^n}\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\cdot(X+1)^{n-k}\cdot(X-1)^{k}}$$

5.(b) Donc $L_n(1) = \boxed{1}$

$$L_n(-1) = \frac{(-2)^n}{2^n} = \boxed{(-1)^n}$$

Le coefficient dominant de $L_n(X)$ est $\frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

donc en comparant avec 2. on a : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}}$

6.(a) On a $U_{n+1} = (X-1)^{n+1} \cdot (X+1)^{n+1}$

On dérive $U_{n+1}' = (n+1).(X-1)^n \cdot (X+1)^{n+1} + (n+1).(X-1)^{n+1}.(X+1)^n$

$$U_{n+1}' = (n+1).(X-1)^n.(X+1)^n.\left[X+1+X-1\right]$$

$\boxed{U_{n+1}' = 2(n+1).X.U_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

6.(b) On dérive la formule précédente :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1}'' = 2(n+1).U_n + 2.(n+1).X.U_n'$

Si $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n' = 2.n.X.U_{n-1}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1}'' = 2.(n+1).U_n + 4.(n+1).n.X^2.U_{n-1}$

$$= 2(n+1).\left[U_n + 2nX^2.U_{n-1}\right]$$

mais $U_n + 2nX^2.U_{n-1} = (X^2-1)^n + 2nX^2.(X^2-1)^{n-1}$

$$= (X^2-1)^n + 2n.(X^2-1).(X^2-1)^{n-1} + 2n.(X^2-1)^{n-1}$$

$$= (2n+1).(X^2-1)^n + 2n.(X^2-1)^{n-1}$$

$$= (2n+1).U_n + 2n.U_{n-1}$$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U''_{n+1} = 2(n+1)(2n+1)U_n + 4n(n+1).U_{n-1}}$

6.(c) On dérive $n \in \mathbb{N}^*$ fois la formule du (a) :

$$U_{n+1}^{(n+1)} = 2(n+1).\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.X^{(k)}.U_n^{(n-k)}$$ d'après la formule de Leibniz

$$= 2(n+1).\left[X.U_n^{(n)} + n.U_n^{(n-1)}\right]$$ car $X^{(k)} = 0$ si $k \geq 2$

On dérive $n-1$ fois la formule du (b) pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$U_{n+1}^{(n+1)} = 2(n+1)(2n+1)U_n^{(n-1)} + 4n(n+1)\,U_{n-1}^{(n-1)}$$

On a donc $L_{n+1} = X.L_n + \dfrac{1}{2^n \times (n-1)!}.U_n^{(n-1)}$ si $n \geq 1$ (1)

et $L_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2^n \times n!}U_n^{(n-1)} + L_{n-1}$ si $n \geq 1$ (2)

Donc $$\frac{(2n+1)n}{2^n \times n!}U_{n-1}^{(n-1)} \overset{(1)}{=} (2n+1).L_{n+1} - (2n+1).X.L_n$$

$$\overset{(2)}{=} n.L_{n+1} - n.L_{n-1}$$

Donc $\boxed{(n+1).L_{n+1} = (2n+1).X.L_n - n.L_{n-1}}$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$.

D'après 6.(a) on sait que : $U'_{n+1} = 2(n+1).X.U_n$

Donc d'après la formule de Leibnitz :

$$U_{n+1}^{(n+2)} = \left(U'_{n+1}\right)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left(2(n+1)X\right)^{(k)} . U_n^{(n+1-k)}$$

$$= 2.(n+1).X.U_n^{(n+1)} + 2.(n+1)^2.U_n^{(n)}$$

$$= 2^n \times n! \times \left[2(n+1).X.L'_n + 2.(n+1)^2.L_n\right]$$

D'autre part $U_{n+1} = (X^2-1).U_n$

Donc d'après la formule de Leibnitz :

$$U_{n+1}^{(n+2)} = \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2}{k} . (X^2-1)^{(k)} . U_n^{(n+2-k)}$$

$$= (X^2-1).U_n^{(n+2)} + 2.(n+2).X.U_n^{(n+1)} + (n+2)(n+1).U_n^{(n)}$$

$$= 2^n \times n! \times \left[(X^2-1).L''_n + 2.(n+2).X.L'_n + (n+2)(n+1).L_n\right]$$

On a donc :

$$2(n+1).X.L'_n + 2(n+1)^2.L_n$$

$$= (X^2-1).L''_n + 2(n+2).X.L'_n + (n+2)(n+1).L_n$$

Donc $\boxed{(X^2-1).L''_n + 2X.L'_n - n(n+1).L_n = 0}$

8. $U_n = (X^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k X^{2n-2k}$

Si $j \in \mathbb{N}$ la dérivée n-ième de X^j est :

$$(X^j)^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geqslant j+1 \\ \frac{j!}{(j-n)!} X^{j-n} & \text{si } n \leqslant j \end{cases}$$

Donc la dérivée n-ième de X^{2n-2k} est :

$$(X^{2n-2k})^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geqslant 2n-2k+1 \text{ ie } 2k \geqslant n+1 \\ \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} X^{n-2k} & \text{si } 2k \leqslant n \text{ ie } k \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \end{cases}$$

Donc :

$$U_n^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . (-1)^k . (X^{2n-2k})^{(n)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{k} . (-1)^k . \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} X^{n-2k} + \underbrace{0}_{\text{termes pour } \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leqslant k \leqslant n}$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{k} . (-1)^k . n! . \binom{2n-2k}{n} . X^{n-2k}$$

Donc $\boxed{L_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \times \binom{n}{k} \times \binom{2n-2k}{n} \times X^{n-2k}}$

Si n est impair et $k \in [\![0, \lfloor n/2 \rfloor]\!]$ alors $n - 2k \geq 1$

Donc <u>si n impair</u> : $\boxed{L_n(0) = 0}$

Si n est pair alors $n - 2k = 0$ pour $k = \frac{n}{2}$.

Donc <u>si n pair</u> : $\boxed{L_n(0) = \frac{1}{2^n}(-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \binom{n}{\frac{n}{2}}}$