Correction du DM15

EXERCICE 1

Soit p la probabilité d'avoir 6 avec le dé pipé.
Pour $i \in [\![1,5]\!]$, la probabilité d'avoir i est $\frac{p}{3}$.

On a $\frac{p}{3} + \frac{p}{3} + \frac{p}{3} + \frac{p}{3} + \frac{p}{3} + p = 1$

donc $\frac{8p}{3} = 1$ donc $p = \frac{3}{8}$.

1. Soit $D =$ " le dé choisi est pipé ".
et pour $i \in [\![1,6]\!]$, $F_i =$ " la face i apparaît ".

Si $i \in [\![1,5]\!]$: $\mathbb{P}(F_i) = \mathbb{P}(F_i \cap D) + \mathbb{P}(F_i \cap \overline{D})$

$$= \mathbb{P}(D) \times \mathbb{P}_D(F_i) + \mathbb{P}(\overline{D}) \times \mathbb{P}_{\overline{D}}(F_i)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{8} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} = \boxed{\frac{11}{72}}$$

$$\mathbb{P}(F_6) = \mathbb{P}(D) \times \mathbb{P}_D(F_6) + \mathbb{P}(\overline{D}) \times \mathbb{P}_{\overline{D}}(F_6)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} = \boxed{\frac{17}{72}}$$

vérification : $\mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(F_2) + \dots + \mathbb{P}(F_6) = 1$
logique car $(F_1, \dots, F_6)$ est un sce.

On demande $\mathbb{P}_{F_6}(D)$. D'après la formule de Bayes avec le sce $(D, \overline{D})$

$$\mathbb{P}_{F_6}(D) = \frac{\mathbb{P}_D(F_6) \times \mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(F_6)} = \frac{\frac{3}{8} \times \frac{1}{3}}{\frac{17}{72}} = \boxed{\frac{9}{17}}$$

2.(a) On choisit les deux dés simultanément.

Alors $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{3}{2}} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$

On note $S =$ "la somme des résultats des dés vaut 12."
$=$ "on obtient $(6,6)$"

$$\mathbb{P}_S(\overline{A}) = \frac{\mathbb{P}_{\overline{A}}(S) \times \mathbb{P}(\overline{A})}{\mathbb{P}_{\overline{A}}(S) \times \mathbb{P}(\overline{A}) + \mathbb{P}_A(S) \times \mathbb{P}(A)}$$

d'après la formule de Bayes avec le sce $(A, \overline{A})$

donc $$\mathbb{P}_S(\overline{A}) = \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{3}} = \frac{2}{11}$$

Et donc $\mathbb{P}_S(A) = \boxed{\dfrac{9}{11}}$

2.(b) On note $B =$ "la somme des résultats des dés vaut 7"
$=$ "on obtient $(2,5)$ ou $(5,2)$ ou $(1,6)$ ou $(6,1)$ ou $(3,4)$ ou $(4,3)$"

Cette fois $\mathbb{P}_{\overline{A}}(B) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{6}$$

Donc de même qu'au 2.(a) :

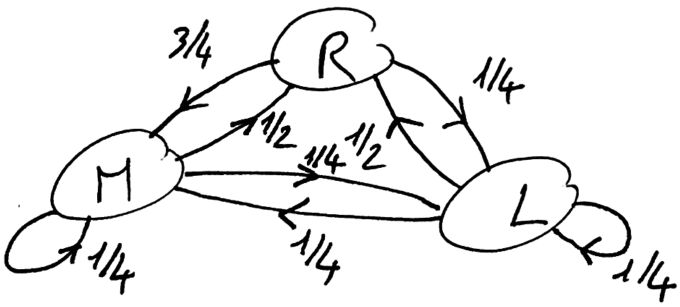
$$\mathbb{P}_B(\bar{A}) = \frac{\mathbb{P}_{\bar{A}}(B) \times \mathbb{P}(\bar{A})}{\mathbb{P}_{\bar{A}}(B) \times \mathbb{P}(\bar{A}) + \mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)}$$

$$= \frac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$$

Et donc $\boxed{\mathbb{P}_B(A) = \frac{2}{3}}$

2.(c) On a $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$. Donc A et B sont indépendants.

EXERCICE 2



1.(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Les événements R_n, L_n et M_n forment un scc donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(R_{n+1}) = \mathbb{P}(R_{n+1} \cap R_n) + \mathbb{P}(R_{n+1} \cap L_n) + \mathbb{P}(R_{n+1} \cap M_n)$$

$$= \mathbb{P}_{R_n}(R_{n+1}) . \mathbb{P}(R_n) + \mathbb{P}_{L_n}(R_{n+1}) . \mathbb{P}(L_n) + \mathbb{P}_{M_n}(R_{n+1}) . \mathbb{P}(M_n)$$

donc $r_{n+1} = \frac{1}{2} l_n + \frac{1}{2} m_n$

De même :

$$l_{n+1} = \frac{1}{4} r_n + \frac{1}{4} l_n + \frac{1}{4} m_n$$

$$m_{n+1} = \frac{3}{4} r_n + \frac{1}{4} l_n + \frac{1}{4} m_n$$

On trouve bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = A.U_n}$

<u>1.(b)</u> $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Par récurrence immédiate : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = A^n \times U_0}$

<u>2.(a)</u> On utilise la méthode du système linéaire.

$$\begin{cases} \boxed{4x_1} + x_2 = y_1 \\ 3x_1 + x_3 = y_2 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = y_3 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow 4L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow 4L_3 - 5L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \boxed{4x_1} + x_2 = y_1 \\ \boxed{-3x_2} + 4x_3 = -3y_1 + 4y_2 \\ -9x_2 - 4x_3 = -5y_1 + 4y_3 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \boxed{4x_1} + x_2 = y_1 \\ \boxed{-3x_2} + 4x_3 = -3y_1 + 4y_2 \\ \boxed{-16x_3} = 4y_1 - 12y_2 + 4y_3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{12}(y_1 + y_2 + y_3) \\ x_2 = \frac{1}{12}(8y_1 - 4y_2 - 4y_3) \\ x_3 = \frac{1}{12}(-3y_1 + 9y_2 - 3y_3) \end{cases}$$

Donc $\underline{S \text{ est inversible}}$ et : $\boxed{S^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & -4 & -4 \\ -3 & 9 & -3 \end{pmatrix}}$

2.(b) On trouve $\boxed{\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

2.(c) On trouve par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \Delta^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{-1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

2.(d) On a $\boxed{A = S \Delta S^{-1}}$

Par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ A^n = S . \Delta^n . S^{-1}}$

2.(e) On trouve : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right) & \frac{1}{3}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right) & \frac{1}{3}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right) \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} + \frac{(-1)^{n+1}}{3 \times 2^{n-1}} & \frac{5}{12} + \frac{(-1)^n}{3 \times 2^n} & \frac{5}{12} + \frac{(-1)^n}{3 \times 2^n} \end{pmatrix}$

3.(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = A^n \times U_0$ donne :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \begin{cases} r_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right) \\ l_n = \frac{1}{4} \\ m_n = \frac{5}{12} + \frac{(-1)^{n+1}}{3 \times 2^{n-1}} \end{cases}}$$

3.(b) $\boxed{\begin{array}{l} r_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{3} \\ l_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{4} \\ m_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{5}{12} \end{array}}$