Correction DM 16

EXERCICE 1

1. La fonction $t \longmapsto t + \arctan t$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (comme somme de fonctions qui le sont).
Elle ne s'annule donc qu'au plus une fois sur $\mathbb{R}$.
Comme elle s'annule en 0, elle peut ne donc pas s'annuler ailleurs.

Donc : $\boxed{t + \arctan t = 0 \iff t = 0}$

2. (a) La fonction $t \overset{\varphi}{\longmapsto} \dfrac{1}{t + \arctan t}$ est donc continue sur $\mathbb{R}^*$ comme inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas.

L'expression $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t + \arctan t}$ est définie lorsque φ est continue sur l'intervalle $[x, 2x]$. C'est le cas si $x \neq 0$ car si $x > 0$ alors $[x, 2x] \subseteq]0, +\infty[$ et si $x < 0$ alors $[x, 2x] \subseteq]-\infty, 0[$.

Ainsi $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}^*.}$

2.(b) Soit $x \neq 0$.

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{t + \arctan t}$$ on utilise le changement de variable affine $s = -t$

$$f(-x) = \int_{x}^{2x} \frac{-ds}{-s + \arctan(-s)} = \int_{x}^{2x} \frac{ds}{s + \arctan s}$$ car arctan impaire

$$= f(x)$$

Donc $\boxed{f \text{ est paire sur } \mathbb{R}.}$

2.(c) On pose $G(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t + \arctan t}$

Comme φ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$, on sait que G est C^1 sur ce même intervalle et que

$$\forall x > 0, \quad G'(x) = \varphi(x) = \frac{1}{x + \arctan x}$$

Mais φ est C^∞ sur $]0, +\infty[$ comme inverse d'une fonction C^∞ qui ne s'annule pas.

Donc G' est C^∞ sur $]0, +\infty[$.

Donc G est C^∞ sur $]0, +\infty[$.

Pour $x > 0$: $f(x) = G(2x) - G(x)$

Donc f est elle aussi C^∞ sur $]0,+\infty[$ comme somme et composée de fonctions qui le sont.

De plus : $\forall x>0,\ f'(x) = 2.G'(2x) - G'(x)$

$$= \frac{2}{2x+\arctan(2x)} - \frac{1}{x+\arctan x}$$

Donc $\boxed{\forall x>0,\ f'(x) = \dfrac{2\arctan x - \arctan(2x)}{(2x+\arctan(2x)).(x+\arctan x)}}$

2.(d) $f'(x)$ est du signe de $2\arctan x - \arctan(2x) = \theta(x)$

θ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x>0,\ \theta'(x) = \dfrac{2}{1+x^2} - \dfrac{2}{1+4x^2}$.

$$= \frac{6x^2}{(1+x^2)(1+4x^2)} > 0$$

Donc θ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\theta(0^+)=0$ on a donc $\forall x>0,\ \theta(x)>0$.

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ (car paire).

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

3. (a) Pour $x > 0$:

$$f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t} = \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t + \arctan t} - \frac{1}{t} \right) dt$$

$$= -\int_x^{2x} \frac{\arctan t}{t(t + \arctan t)} dt$$

Donc $$\left| f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t + \arctan t} \right| = \left| \int_x^{2x} \frac{\arctan t}{t(t + \arctan t)} dt \right|$$

$$\leq \int_x^{2x} \left| \frac{\arctan t}{t(t + \arctan t)} \right| dt$$

On peut utiliser l'inégalité triangulaire car les bornes sont dans le bon sens : $2x > x$ car $x > 0$

Mais si $x > 0$ alors $[x, 2x] \subseteq]0, +\infty[$

et alors $\forall t \in [x, 2x]$, $\frac{\arctan t}{t(t + \arctan t)} > 0$

Donc $$\left| f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t + \arctan t} \right| \leq \int_x^{2x} \frac{\arctan t}{t(t + \arctan t)} dt$$

Mais si $t > 0$ alors $0 < \arctan t < \frac{\pi}{2}$ donc

$$\frac{\arctan t}{t(t + \arctan t)} \leq \frac{\pi}{2t^2}$$

Comme les bornes sont dans le bon sens on a par croissance de l'intégrale :

$$\boxed{\left| f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \right| \leq \frac{\pi}{2} \cdot \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2}}$$

3. (b) On a en fait :

$$\forall x > 0, \quad \left| f(x) - (\ln 2x - \ln x) \right| \leq \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x} \right)$$

$$\left| f(x) - \ln 2 \right| \leq \frac{\pi}{4x}$$

Par majoration de l'erreur :

$$\frac{\pi}{4x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ln 2}$$

Comme f est paire on a aussi $\boxed{f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} \ln 2}$

EXERCICE 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

La fonction $x \longmapsto \cos x$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et ne s'annule pas donc la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{(\cos x)^n}$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Donc I_n existe.

Ainsi la suite $\boxed{(I_n)_{n \geqslant 0} \text{ est bien définie}}$. $\boxed{I_0 = \frac{\pi}{4}}$

$$I_2 = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{(\cos x)^2} = \Big[\tan x\Big]_0^{\pi/4} = 1 - 0 = \boxed{1}$$

2. $$I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\cos^2 x}\, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\varphi'(x)\, dx}{1 - \varphi(x)^2}$$

où $t = \varphi(x) = \sin x$

φ est C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et

x	t
0	0
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$

Donc $$I_1 = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dt}{1 - t^2}$$

Mais $$\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1+t)(1-t)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+t) + (1-t)}{(1-t)(1+t)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)$$

Donc $I_1 = \frac{1}{2}\left[-\ln(|1-t|) + \ln(|1+t|)\right]_0^{1/\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{2}\left(-\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \boxed{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{(\cos x)^{n+1}} - \frac{1}{(\cos x)^n}\right)dx$ par linéarité de $\int$

$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{(\cos x)^{n+1}}\left(1 - \cos x\right)dx \geqslant 0$

car intégrale d'une fonction continue positive (bornes dans le bon sens)

Donc $\boxed{(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$I_n - \int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{dx}{(\cos x)^n} = \int_0^{\pi/6}\frac{dx}{(\cos x)^n}$ (relation de Chasles)

$\geqslant 0$ car intégrale d'une fonction continue positive (bornes dans le bon sens)

Pour $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ on a $0 < \cos x \leqslant \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

donc $\frac{1}{(\cos x)^n} \geqslant \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$

donc $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{(\cos x)^n} \geqslant \underbrace{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n}$

$= \frac{\pi}{12}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$

Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \geqslant \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{(\cos x)^n} \geqslant \frac{\pi}{12}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n}$

$\frac{2}{\sqrt{3}} > 1$ donc $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Donc par minoration : $\boxed{I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$I_{n+2} = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{(\cos x)^{n+2}} = \int_0^{\pi/4} \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)}{(\cos x)^{n+2}}dx$

$= \int_0^{\pi/4} \underbrace{\sin x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{(\cos x)^{n+2}}}_{v'(x)} dx + \underbrace{\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{(\cos x)^n}}_{= I_n}$

On a $u'(x) = \cos x$ et $v(x) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{(\cos x)^{n+1}}$

Comme u et v sont C^1 sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ on a par IPP :

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 x}{(\cos x)^{n+2}} dx = \left[\frac{\sin x}{(n+1).(\cos x)^{n+1}} \right]_0^{\pi/4} - \frac{1}{n+1} \cdot \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{(\cos x)^n}$$

$$= \frac{(\sqrt{2})^n}{n+1} - 0 - \frac{1}{n+1} \cdot I_n$$

Donc $I_{n+2} = \frac{(\sqrt{2})^n}{n+1} - \frac{1}{n+1} \cdot I_n + I_n$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \frac{(\sqrt{2})^n}{n+1} + \frac{n}{n+1} I_n}$

EXERCICE 3

1. (a) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

Alors $L_n(\alpha . P_1 + P_2) = X . (\alpha P_1'' + P_2'') + (X-4) . (\alpha P_1' + P_2') - 3(\alpha P_1 + P_2)$

$$= \alpha . \left(X P_1'' + (X-4) P_1' - 3 P_1 \right) + X P_2'' + (X-4) P_2' - 3 P_2$$

$$= \alpha . L_n(P_1) + L_n(P_2)$$

Donc L_n est linéaire.

Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors il est clair que L_n $\mathbb{R}[X]$.

De plus $\deg P \leq n$ donc $\deg P' \leq n-1$ et $\deg P'' \leq n-2$

et donc $\deg XP'' \leq n-1$ et $\deg (X-4)P' \leq n$

Ainsi $\deg (L_n(P)) \leq n$. Donc $L_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Donc $\boxed{L_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])}$

1. (b) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tq $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$.

On note $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $d \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ tq $a_d \neq 0$ et donc $d = \deg P$

Alors $P' = \sum_{k=1}^{d} k a_k X^{k-1}$ et $P'' = \sum_{k=2}^{d} k(k-1) a_k X^{k-2}$

Donc $L_n(P) = \sum_{k=2}^{d} k(k-1) a_k X^{k-1} + (X-4) . \sum_{k=1}^{d} k a_k X^{k-1} - 3 \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$

$L_n(P) = (d-3).a_d X^d +$ termes de deg $\leq d-1$

Donc si $\deg P \neq 3$ ie $d \neq 3$ alors $\boxed{\deg(L_n(P)) = \deg P}$

Donc $\deg P \neq 3 \Rightarrow \deg L_n(P) \neq -\infty \Rightarrow L_n(P) \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$

$\Rightarrow P \notin \operatorname{Ker} L_n$

Par contraposée :

$$\boxed{\left(P \neq 0_{\mathbb{R}[X]} \text{ et } P \in \operatorname{Ker}(L_n)\right) \Rightarrow \deg P = 3}$$

<u>1.(c)</u> Soit $P \in \operatorname{Ker}(L_n)$ tq $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$.

Alors $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ où $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ et $a \neq 0$

Donc $L_n(P) = 0_{\mathbb{R}[X]}$

donne $X(6aX + 2b) + (X-4)(3aX^2 + 2bX + c) - 3(aX^3 + bX^2 + cX + d)$

$= 0_{\mathbb{R}[X]}$

donc $(6a - 12a + 2b - 3b)X^2 + (2b + c - 8b - 3c)X + (-4c - 3d) = 0_{\mathbb{R}[X]}$

donc $\begin{cases} -6a - b = 0 \\ -6b - 2c = 0 \\ -4c - 3d = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} b = -6a \\ c = 18a \\ d = -24a \end{cases}$

Donc $P = a.(X^3 - 6X^2 + 18X - 24) = a.R_0(X)$

Si $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$ alors $P = a.R_0(X)$ avec $a = 0$.

Donc $\mathrm{Ker}(L_n) \subseteq \mathrm{Vect}(R_0)$.

Réciproquement : $L_n(R_0) = 0_{\mathbb{R}[X]}$ donc $R_0 \in \mathrm{Ker}(L_n)$

et comme $\mathrm{Ker}(L_n)$ est un sev de $\mathbb{R}_n[X]$: $\mathrm{Vect}(R_0) \subseteq \mathrm{Ker}(L_n)$

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(L_n) = \mathrm{Vect}(R_0)}$

D'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathbb{R}_n[X]) = \dim(\mathrm{Ker}(L_n)) + \dim(\mathrm{Im}(L_n))$$

$$n+1 = 1 + \dim(\mathrm{Im}(L_n))$$

Donc $\boxed{\dim(\mathrm{Im}(L_n)) = n}$

<u>1.(d)</u> Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dim finie :

L_n est automorphisme de $\mathbb{R}_n[X] \iff L_n$ est injectif

$\iff \mathrm{Ker}(L_n) = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$

On a vu que : $n \geqslant 3 \Rightarrow \mathrm{Ker}(L_n) = \mathrm{Vect}(R_0) \neq \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$

donc $\mathrm{Ker}(L_n) = \{0_{\mathbb{R}[X]}\} \Longrightarrow n \leqslant 2$.

Ainsi : L_n automorphisme de $\mathbb{R}_n[X] \Longrightarrow n \leqslant 2$

Réciproquement si $n \leqslant 2$.

Si $P \in \mathrm{Ker}(L_n)$ et $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ alors $\deg P = 3$.

C'est impossible car $P \in \mathbb{R}_n[X]$ avec $n \leqslant 2$

Donc $\mathrm{Ker}(L_n) = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$.

Donc : $\boxed{L_n \text{ automorphisme de } \mathbb{R}_n[X] \iff n \leqslant 2}$

2.(a) $(1, X, X^2, X^3, X^4, X^5, X^6)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_5[X]$.

On a
$$\left.\begin{array}{l} L_5(1) = -3 = -3 \times 1 = -3.S_1 \\ L_5(X) = -2X - 4 = -4.S_1 - 2S_2 \\ L_5(X^2) = X^2 - 8X = -8.S_2 + S_3 \\ L_5(X^3) = -6X^2 = -6.S_3 \\ L_5(X^4) = X^4 - 4X^3 = S_4 \\ L_5(X^5) = 2X^5 = S_5 \end{array}\right\} \text{ ils appartiennent à } \mathrm{Vect}(S_1, S_2, S_3, S_4, S_5)$$

On on sait que $\mathrm{Im}(L_5)$ est engendrée par ces 6 polynômes.

Donc $\mathrm{Im}(L_5) \subseteq \mathrm{Vect}(S_1, S_2, S_3, S_4, S_5)$

La famille $(S_1, S_2, S_3, S_4, S_5)$ est libre car de degrés échelonnés. Donc $\dim(\mathrm{Vect}(S_1, S_2, S_3, S_4, S_5)) = 5 = \dim(\mathrm{Im}(L_5))$

Donc $\mathrm{Im}(L_5) = \mathrm{Vect}(S_1, S_2, S_3, S_4, S_5)$.

Donc $\boxed{\text{la famille } (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(L_5)}$

2.(b)(i) On veut résoudre l'équation $L_5(P) = X^5$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}_5[X]$

$$L_5(P) = X^5 \iff L_5(P) = \frac{1}{2} L_5(X^5) \iff L_5\left(P - \frac{1}{2}X^5\right) = 0_{\mathbb{R}[X]}$$
$$\iff P - \frac{1}{2}X^5 \in \mathrm{Ker}(L_5)$$
$$\iff \exists \alpha \in \mathbb{R},\ P - \frac{1}{2}X^5 = \alpha . R_0(X)$$

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2} X^5 + a \cdot R_0(X) \ ; \ a \in \mathbb{R} \right\}}$

2.(b).(ii) On veut résoudre l'équation $L_5(P) = X^4$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}_5[X]$

Si P est solution alors $X^4 \in \mathrm{Im}(L_5)$.

Donc $X^3 = \frac{1}{3} \cdot \left(X^4 - (X^4 - 3X) \right) \in \mathrm{Im}(L_5)$.

Donc tous les polynômes de la base canonique de $\mathbb{R}_5[X]$ appartiennent à $\mathrm{Im}(L_5)$.

Donc $\mathbb{R}_5[X] \subseteq \mathrm{Im}(L_5)$

Donc $\dim(\mathbb{R}_5[X]) = 6 \leqslant \dim(\mathrm{Im}(L_5)) = 5$.

Impossible. Donc cette fois $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$