Correction DM7

EXERCICE 1

1. On utilise la méthode du système linéaire :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ -x_1 + x_2 = y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ 2x_2 = y_1 + y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2) \\ x_2 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \end{cases}$$

donc P est inversible et $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$

2.(a) $AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ donc $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

2.(b) Pour $n \in \mathbb{N}$ on note H_n le prédicat "$A^n = PB^nP^{-1}$"

On a $A^0 = I_2$

et $P.B^0.P^{-1} = P.I_2.P^{-1} = P.P^{-1} = I_2$

donc H_0 est vrai.

Soit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel H_n est vrai.

On a $A^{n+1} = A \times A^n = A \times PB^nP^{-1}$ d'après H_n.

Or $B = P^{-1}AP$ donc $PB = AP$.

Donc $A^{n+1} = PB \times B^nP^{-1} = PB^{n+1}P^{-1}$. Donc H_{n+1} est vrai.

D'après le principe de récurrence, H_n est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PB^n.P^{-1}}$$

2.(c) Comme B est diagonale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad PB^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ -1 & 2^n \end{pmatrix}$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+2^n & -1+2^n \\ -1+2^n & 1+2^n \end{pmatrix}}$

3.(a) Pour $n \in \mathbb{N}$ on note H_n le prédicat "$u_n \geq 1$".

Comme $u_0 = 2$ on a $u_0 \geq 1$. Donc H_0 est vrai.

Soit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel H_n est vrai.

On a $u_{n+1} = \dfrac{3u_n+1}{u_n+3} = \dfrac{3u_n+9-8}{u_n+3} = 3 - \dfrac{8}{u_n+3}$

Mais $u_n \geq 1$ donc $u_n+3 \geq 4$ donc $\dfrac{1}{u_n+3} \leq \dfrac{1}{4}$

donc $-\dfrac{8}{u_n+3} \geq -\dfrac{8}{4} = -2$

donc $u_{n+1} \geq 3-2 = 1$

Donc H_{n+1} est vrai.

D'après le principe de récurrence, H_n est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \geq 1}$$

3.(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3} - u_n = \frac{3u_n + 1 - u_n^2 - 3u_n}{u_n + 3} = \frac{1 - u_n^2}{u_n + 3} \leqslant 0$$

car $u_n \geqslant 1$

Donc (u_n) est décroissante.

3.(c) Comme (u_n) est décroissante et minorée par 1, on sait d'après le théorème de la limite monotone qu'elle converge vers un réel $\ell \geqslant 1$.

On a $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ donc $u_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ (suite extraite)

et $\dfrac{3u_n + 1}{u_n + 3} \longrightarrow \dfrac{3\ell + 1}{\ell + 3}$

(opérations sur les limites avec $\ell + 3 \neq 0$)

On a donc $\ell = \dfrac{3\ell + 1}{\ell + 3}$ donc $\ell^2 = 1$ donc $\ell = \pm 1$.

Comme $\ell \geqslant 1$ on a donc $\ell = 1$.

Ainsi $\boxed{u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1}$

4.(a) Pour $n \in \mathbb{N}$ on note H_n le prédicat

"$a_n > 0$ et $b_n > 0$ et $u_n = \frac{a_n}{b_n}$".

On a $a_0 = 2 > 0$ et $b_0 = 1 > 0$

donc $\frac{a_0}{b_0} = 2 = u_0$. Ainsi H_0 est vrai.

Soit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel H_n est vrai.

Comme $a_n > 0$ et $b_n > 0$ on a $a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n > 0$

et $b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}b_n > 0$.

De plus $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{3a_n + b_n}{a_n + 3b_n}$

et $u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3} = \frac{3\frac{a_n}{b_n} + 1}{\frac{a_n}{b_n} + 3} = \frac{3a_n + b_n}{a_n + 3b_n} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$

Donc H_{n+1} est vrai.

D'après le principe de récurrence H_n est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > 0 \text{ et } b_n > 0 \text{ et } u_n = \frac{a_n}{b_n}}$$

4.(b) On a $X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3a_n + b_n \\ a_n + 3b_n \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A.X_n$

et donc par récurrence immédiate : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n . X_0}$

4.(c) On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+2^n & 2^n-1 \\ 2^n-1 & 2^n+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3\times 2^n + 1 \\ 3\times 2^n - 1 \end{pmatrix}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 3\times 2^{n-1} + \frac{1}{2}$ et $b_n = 3\times 2^{n-1} - \frac{1}{2}$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{3\times 2^n + 1}{3\times 2^n - 1}}$

Donc $u_n = \dfrac{3 + \frac{1}{2^n}}{3 - \frac{1}{2^n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{3+0}{3-0} = 1$

on retrouve que $\boxed{u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1}$

EXERCICE 2

Partie I

1. Comme g vérifie (i) on a pour $x=y=0$:

$$g(0+0)=g(0)+g(0)$$

ie $g(0)=2.g(0)$ donc $\boxed{g(0)=0}$

2. Pour $n\in\mathbb{N}$ on note H_n le prédicat : $g(n)=a\times n$.

Comme $g(0)=0$ on a H_0 qui est vrai.

Soit $n\in\mathbb{N}$ pour lequel H_n est vrai.

On a donc $g(n)=a\times n$.

Comme g vérifie (i) on a pour $x=n$ et $y=1$:

$$g(n+1)=g(n)+g(1)=a\times n+a=a\times(n+1)$$

donc $H(n+1)$ est vrai.

D'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ g(n)=a\times n.}$

Soit maintenant $n\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$ donc $n\leqslant -1$.

On pose $p=|n|=-n$ donc $p\in\mathbb{N}^*$

Comme g vérifie (i) on a pour $x=n$ et $y=p$:

$$g(n+p)=g(n)+g(p)$$

Mais $g(n+p) = g(0) = 0$

et $g(p) = ap$ puisque $p \in \mathbb{N}$.

donc $0 = g(n) + ap$

donc $g(n) = -ap = an$

Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ g(n) = an}$

3. Soit $r \in \mathbb{Q}$ fixé qcq.

Alors $\exists (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\quad r = \frac{p}{q}$

On a $p = qr$ donc $g(p) = g(qr)$

Mais $p \in \mathbb{Z}$ donc $g(p) = ap$

Donc $g(qr) = ap$.

Mais puisque $q \in \mathbb{N}^*$ on a $qr = \underbrace{r + r + r + \dots + r}_{q \text{ fois}}$

Comme g vérifie (i) :

$$g(qr) = g(\underbrace{r + r + \dots + r}_{q \text{ fois}}) = \underbrace{g(r) + g(r) + \dots + g(r)}_{q \text{ fois}}$$

$$= q \cdot g(r)$$

On a donc $q \cdot g(r) = ap$ donc $g(r) = a\frac{p}{q} = ar$

Ainsi $\boxed{\forall r \in \mathbb{Q},\ g(r) = ar}$

4. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $r_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.

D'après le cours (r_n) est une suite rationnels qui converge vers x.

On a $r_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$

et $g(t) \xrightarrow[t \to x]{} g(x)$

car g continue en x d'après (ii)

Donc par composition de limites : $g(r_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} g(x)$

Mais $g(r_n) \underset{\substack{\uparrow \\ r_n \in \mathbb{Q}}}{=} a \cdot r_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} ax$

donc par unicité de la limite : $g(x) = ax$

Ainsi $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = ax}$

5. <u>Analyse</u> Soit g une solution.

D'après les questions précédentes, il existe un réel a tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = ax$.

<u>Synthèse</u> Soit $a \in \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = ax$.

g est polynômiale donc continue sur $\mathbb{R}$.

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x+y) = a(x+y) = ax + ay = g(x) + g(y)$

Donc g est solution du problème.

<u>Conclusion</u> Les solutions sont toutes les fonctions

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = ax$

où $a \in \mathbb{R}$.

Partie II

1.(a) Comme f vérifie (i) : $f(0+0) = f(0) \times f(0)$

donc $f(0) = f(0)^2$

donc $\boxed{f(0) = 0 \text{ ou } 1}$

1.(b) On suppose que f s'annule sur $\mathbb{R}$:

$\exists x_0 \in \mathbb{R},\ f(x_0) = 0.$

On veut montrer que f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$:

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0.$

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé qcq.

Comme f vérifie (i) :

$$f(x) = f(x_0 + x - x_0) = \underbrace{f(x_0)}_{=0} \times f(x - x_0) = 0$$

Donc ou bien f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$, ou bien f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

1.(c) On suppose que f n'est pas la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

D'après 1.(b) : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$

Et $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \times f\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0}$

Comme $f(0) = 0$ ou 1 on a $\boxed{f(0) = 1}$

<u>2.(a)</u> D'après 1.(c) : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$

Donc g <u>est définie sur $\mathbb{R}$</u>.

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\ln$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$

alors par composition : g <u>est continue sur $\mathbb{R}$</u>.

<u>2.(b)</u> Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$g(x+y) = \ln\left(f(x+y)\right) = \ln\left(f(x) \times f(y)\right)$$
$$= \ln\left(f(x)\right) + \ln\left(f(y)\right) = g(x) + g(y)$$

Donc $\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x+y) = g(x) + g(y)}$

<u>2.(c)</u> g est donc solution du problème de la partie I.

Donc il existe un réel a tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = ax$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{g(x)} = e^{ax} = (e^a)^x$

Si on pose $b = e^a > 0$ on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = b^x$

3. Analyse Soit f une solution du problème, non nulle.

On vient de voir qu'il existe un réel $b > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = b^x$.

Synthèse Soit $b > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = b^x = e^{x \cdot \ln b}$.

Alors f est continue sur $\mathbb{R}$ et :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = b^{x+y} = b^x \times b^y = f(x) \times f(y)$

Donc f est solution du problème.

Conclusion : Les solutions du problème sont toutes les fonctions de la forme $x \mapsto b^x$ où $b > 0$, ainsi que la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.