Correction DM9 Polynômes de Tchebychev

1.(a) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$ch^2(z) - sh^2(z) = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2z} + 2 + e^{-2z}}{4} - \frac{e^{2z} - 2 + e^{-2z}}{4}$$
$$= \boxed{1}$$

1.(b) Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.

$$ch(a).ch(b) + sh(a).sh(b) = \frac{e^a + e^{-a}}{2} \cdot \frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^a - e^{-a}}{2} \cdot \frac{e^b - e^{-b}}{2}$$
$$= \frac{e^{a+b} + e^{a-b} + e^{b-a} + e^{-a-b} + e^{a+b} - e^{a-b} - e^{-a+b} + e^{-a-b}}{4}$$
$$= \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2} = \boxed{ch(a+b)}$$

1.(c) Si $x \in \mathbb{R}$: $ch(ix) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \boxed{\cos x}$

$$sh(ix) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = \boxed{i.\sin(x)}$$

1.(d) On fixe $z \in \mathbb{C}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note H_n le prédicat : " $T_n(ch z) = ch(nz)$ "

Initialisation. Si $n = 0$: $T_0(X) = 1$ donc $T_0(ch z) = 1$

et $ch(0.z) = ch(0) = 1$

donc H_0 est vrai.

Si $n = 1$: $T_1(X) = X$ donc $T_1(ch z) = ch z = ch(1 \times z)$

donc H_1 est vrai.

Hérédité à 2 pas. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé pour lequel H_n et H_{n+1} sont vrais.

On a : $T_{n+2}(X) = 2X.T_{n+1}(X) - T_n(X)$

Donc : $T_{n+2}(\operatorname{ch} z) = 2\operatorname{ch}(z)\, T_{n+1}(\operatorname{ch} z) - T_n(\operatorname{ch} z)$

$= 2\operatorname{ch}(z)\operatorname{ch}((n+1)z) - \operatorname{ch}(nz)$ d'après H_n et H_{n+1}

D'après 1(b) : $\operatorname{ch}((n+2)z) = \operatorname{ch}((n+1)z)\operatorname{ch} z + \operatorname{sh}((n+1)z)\operatorname{sh} z$

et de même : $\operatorname{ch}(nz) = \operatorname{ch}((n+1)z)\operatorname{ch}(z) - \operatorname{sh}((n+1)z)\operatorname{sh}(z)$

On en déduit que : $\operatorname{ch}((n+1)z)\operatorname{ch}(z) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}((n+2)z) + \operatorname{ch}(nz)\right)$

D'où $T_{n+2}(\operatorname{ch} z) = \operatorname{ch}((n+2)z)$. Donc H_{n+2} est vrai.

Par récurrence à 2 pas on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, H_n est vrai.

ie $\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, T_n(\operatorname{ch} z) = \operatorname{ch}(nz)}$

2(a)

$T_0 = 1$

$T_1 = X$

$T_2 = 2X^2 - 1$

$T_3 = 4X^3 - 3X$

$T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$

$T_5 = 16X^5 - 20X^3 + 5X$

$U_1 = 1$

$U_2 = 2X$

$U_3 = 4X^2 - 1$

$U_4 = 8X^3 - 6X$

$U_5 = 16X^4 - 12X^2 + 1$

2(b) C'est immédiat par récurrence à 2 pas.

2(c) $T_0 = 1$ donc $\boxed{\deg(T_0) = 0}$ et $\boxed{\operatorname{cd}(T_0) = 1}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note H_n le prédicat " le terme dominant de $T_n(X)$ est $2^{n-1}X^n$ ".

Initialisation H_1 et H_2 sont vrais.

Hérédité à 2 pas. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé pour lequel H_n et H_{n+1} sont vrais.

On a $T_{n+2} = 2X\,T_{n+1} - T_n$

D'après H_n et H_{n+1} on a :

$T_n = 2^{n-1} \cdot X^n +$ termes de degré $< n$

$T_{n+1} = 2^n \cdot X^{n+1} +$ termes de degré $< n+1$

Donc $T_{n+2} = 2^{n+1} X^n +$ termes de degré $< n+2$

Donc H_{n+2} est vrai.

Par récurrence à 2 pas : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, H_n est vrai.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \deg(T_n) = n \text{ et } \mathrm{cd}(T_n) = 2^{n-1}}$

2.(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note H_n le prédicat : "$T_n(-X) = (-1)^n \cdot T_n(X)$"

Initialisation. H_0 et H_1 sont vrais

Hérédité à 2 pas. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé pour lequel H_n et H_{n+1} sont vrais.

On a $T_{n+2} = 2X \cdot T_{n+1} - T_n$

On compose à droite par $-X$:

$$\begin{aligned} T_{n+2}(-X) &= -2X \cdot T_{n+1}(-X) - T_n(-X) \\ &= -2X \cdot (-1)^{n+1} \cdot T_{n+1}(X) - (-1)^n \cdot T_n(X) \quad \text{d'après } H_n \text{ et } H_{n+1} \\ &= (-1)^{n+2} \cdot \left[2X \cdot T_{n+1}(X) - T_n(X)\right] \\ &= (-1)^{n+2} \cdot T_{n+2}(X) \end{aligned}$$

Donc H_{n+2} est vrai.

Par récurrence à 2 pas : $\forall n \in \mathbb{N}$, H_n est vrai.

Donc : $\boxed{\begin{array}{l} \text{si } n \text{ pair, } T_n \text{ est pair} \\ \text{si } n \text{ impair, } T_n \text{ est impair} \end{array}}$

2.(e) On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \frac{1}{n} \cdot T_n'$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \deg U_n = n-1 \text{ et } \mathrm{cd}(U_n) = \frac{2^{n-1}}{n}}$

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ U_n \in \mathbb{R}[X]}$

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_n(-X) = (-1)^n . T_n(X)$ donc $-T_n'(-X) = (-1)^n . T_n'(X)$

donc $U_n(-X) = (-1)^{n-1} . U_n(X)$

Donc : si n est pair non nul alors U_n est impair
si n est impair alors U_n est pair

2.(f) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = T_n(1) \in \mathbb{R}$.

On a $u_0 = u_1 = 1$

et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$

On voit par récurrence à 2 pas immédiate que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, T_n(1) = 1}$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n(-X) = (-1)^n . T_n(X)$

on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ T_n(-1) = (-1)^n}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $v_n = T_n(0) \in \mathbb{R}$.

On a $v_0 = 1$ et $v_1 = 0$

et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = -v_n$

On reconnaît une suite récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $z^2 + 1 = 0$ pour laquelle $\Delta < 0$ et $z = \pm i = e^{\pm i \pi/2}$

Donc $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1^n \times \left(\lambda \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \mu . \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$

$v_0 = 1$ donne $\lambda = 1$

$v_1 = 0$ donne $\mu = 0$.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ T_n(0) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$

3.(a) On a $\forall z \in \mathbb{C}$, $T_n(\mathrm{ch}\, z) = \mathrm{ch}(nz)$

Donc $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\mathrm{ch}(i\theta)) = \mathrm{ch}(in\theta)$ ie $\boxed{T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)}$

On dérive par rapport à θ :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ -\sin(\theta) \times T_n'(\cos\theta) = -n \times \sin(n\theta)$$

On divise par $-n$:

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin(\theta) . U_n(\cos\theta) = \sin(n\theta)}$$

3.(b) $\cos(n\theta) = \mathrm{Re}(e^{in\theta}) = \mathrm{Re}((e^{i\theta})^n) = \mathrm{Re}((\cos\theta + i\sin\theta)^n)$

Mais d'après la formule du binôme :

$$e^{in\theta} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . i^k . \sin(\theta)^k . \cos(\theta)^{n-k}$$

On somme par paquets suivant que k est pair ou impair :

$$e^{in\theta} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} . i^{2k} . \sin(\theta)^{2k} . \cos(\theta)^{n-2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} . i^{2k+1} . \sin(\theta)^{2k+1} . \cos(\theta)^{n-2k-1}$$

$$e^{in\theta} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} . (-1)^k . \sin(\theta)^{2k} . \cos(\theta)^{n-2k}}_{\in \mathbb{R}} + i . \underbrace{\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} \sin(\theta)^{2k+1} . \cos(\theta)^{n-2k-1} . (-1)^k}_{\in \mathbb{R}}$$

Donc $\cos(n\theta) = \mathrm{Re}(e^{in\theta}) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} . (-1)^k . \sin(\theta)^{2k} . \cos(\theta)^{n-2k}$

et $\sin(\theta)^{2k} = (1 - \cos(\theta)^2)^k$

Donc : $\boxed{T_n(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} . (\cos(\theta)^2 - 1)^k . \cos(\theta)^{n-2k}}$

3.(c) On pose $Q_n(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} . (X^2-1)^k . X^{n-2k}$

On a $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = Q_n(\cos\theta)$

donc $\forall x \in [-1,1]$, $T_n(x) = Q_n(x)$

Donc le polynôme $T_n - Q_n$ a une infinité de racines.

c'est donc le polynôme nul.

Ainsi $\boxed{T_n(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} . (X^2-1)^k . X^{n-2k}}$

3.(d) On a $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\sin(\theta) \times U_n(\cos\theta) = \sin(n\theta)$

Les calcul précédents donnent que :

$$\sin(n\theta) = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} . \sin(\theta)^{2k+1} . \cos(\theta)^{n-2k-1} . (-1)^k$$

Pour $\theta \in]0, \pi[$ on a $\sin(\theta) \neq 0$ donc :

$$U_n(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} . \sin(\theta)^{2k} . \cos(\theta)^{n-2k-1} . (-1)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} . (1-\cos(\theta)^2)^k . \cos(\theta)^{n-2k-1} . (-1)^k$$

Avec le même raisonnement que précédemment :

$$\boxed{U_n(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} . (X^2-1)^k . X^{n-2k-1}}$$

4.(a) $\cos(n\theta)=0 \iff n\theta = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

$$\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ n\theta = \frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ \theta = \frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n} = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

Pour avoir les solutions dans $]0,\pi[$ on doit avoir $k\in[\![0,n-1]\!]$.

4.(b) Pour $k\in[\![0,n-1]\!]$ on pose $\alpha_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$

On a $\forall k\in[\![0,n-1]\!]$, $T_n(\alpha_k) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=0$

Donc les réels $\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}$ sont racines de T_n.

Comme cos est injective sur $]0,\pi[$, ce sont des réels distincts.

D'autre part on sait que $\deg(T_n)=n$

On en déduit que $\alpha_0,\dots,\alpha_{n-1}$ sont exactement les racines de T_n et qu'elles sont simples.

Donc T_n est scindé à racines simples.

4.(c) On a donc $\boxed{T_n = 2^{n-1}\times\prod_{k=0}^{n-1}\left(X-\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}$

4.(d) On évalue en 0 :

$$T_n(0)=\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 2^{n-1}\times(-1)^n\times\prod_{k=0}^{n-1}\alpha_k$$

donc $\boxed{\prod_{k=0}^{n-1}\alpha_k = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\times\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$

5.(a) Soit $x \in [-1,1]$.

On pose $\theta = \arccos x$.

Donc $\theta \in [0,\pi]$ et $x = \cos\theta$.

On a $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$

donc $\boxed{T_n(x) = \cos(n.\arccos x)}$

5.(b) Soit $x \in [-1,1]$. D'après la formule du binôme :

$$(x+i\sqrt{1-x^2})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k (1-x^2)^{k/2} . x^{n-k}$$

$$(x-i\sqrt{1-x^2})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k i^k (1-x^2)^{k/2} . x^{n-k}$$

Donc :

$$(x+i\sqrt{1-x^2})^n + (x-i\sqrt{1-x^2})^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . \underbrace{\left[1+(-1)^k\right]}_{=0 \text{ si } k \text{ impair}} . i^k . (1-x^2)^{k/2} . x^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} . 2 . (-1)^k . (1-x^2)^k . x^{n-2k} = 2 . T_n(x)$$

Donc $\boxed{\forall x \in [-1,1],\ T_n(x) = \frac{1}{2}\left[(x+i\sqrt{1-x^2})^n + (x-i.\sqrt{1-x^2})^n\right]}$

5.(c) $\forall x \in [-1,1]$, $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ donc $\boxed{|T_n(x)| \leq 1}$

Et : $|T_n(x)| = 1 \iff \cos(n.\arccos x) = \pm 1$

$$|T_n(x)| = 1 \iff n.\arccos x = 0\ [\pi]$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \arccos x = \frac{k\pi}{n}$$
$$\arccos x \in [0,\pi] \longrightarrow \iff \exists k \in [\![0,n-1]\!];\ \arccos x = \frac{k\pi}{n}$$
$$\iff \exists k \in [\![0,n-1]\!];\ x = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

<u>6. (a)</u> Soit $x \in]-1,1[$.

On pose $\theta = \arccos(x) \in]0,\pi[$ si bien que $\cos(\theta) = x$.

On a $\sin(\theta).\ U_n(\cos\theta) = \sin(n\theta)$

donc $U_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$

ie $U_n(x) = \dfrac{\sin(n.\arccos x)}{\sin(\arccos x)}$

classiquement : $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$

Donc $\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ U_n(x) = \dfrac{\sin(n.\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}}$

<u>6. (b)</u> On fixe $\theta \in \mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note H_n le prédicat "$|\sin(n\theta)| \leq n.|\sin\theta|$"

<u>Initialisation</u> $0 \leq 0$ donc H_0 est vrai.

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé pour lequel H_n est vrai.

On a $\sin((n+1)\theta) = \sin(n\theta).\cos\theta + \cos(n\theta).\sin\theta$

D'après l'inégalité triangulaire :

$$|\sin((n+1)\theta)| \leq |\sin(n\theta)|.\underbrace{|\cos\theta|}_{\leq 1} + \underbrace{|\cos(n\theta)|}_{\leq 1}.|\sin\theta|$$
$$\leq |\sin(n\theta)| + |\sin\theta|$$

D'après H_n :

$$|\sin((n+1)\theta)| < n.|\sin\theta| + |\sin\theta| = (n+1).|\sin\theta|$$

Donc H_{n+1} est vrai.

Par récurrence : H_n est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ie $\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \ |\sin(n\theta)| \leqslant n.|\sin\theta|}$

6.(c) On a donc :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad |U_n(x)| \leqslant n.\frac{|\sin(\arccos x)|}{\sqrt{1-x^2}} = n$$

En passant à la limite lorsque $x \to (-1)^+$ ou $x \to 1^-$

on a par continuité de U_n (qui est une fonction polynomiale) :

$|U_n(-1)| \leqslant n$ et $|U_n(1)| \leqslant n$.

Donc $\boxed{\forall x \in [-1,1], \ |U_n(x)| \leqslant n}$

De plus : $|U_n(x)| = n \iff |\sin(n.\arccos x)| = n.\sqrt{1-x^2} = n.|\sin(\arccos x)|$

En reprenant le raisonnement du .(b) on a :

$$\forall \theta \in]0,\pi[, \ |\sin(n\theta)| < n.|\sin\theta|$$

donc $|\sin(n\theta)| \neq n.|\sin\theta|$

Donc : $|U_n(x)| = n \iff \arccos x = 0$ ou π

$\iff x = -1$ ou 1

7.(a) ch est continue et strictement croissante de $[0,+\infty[$ vers $[1,+\infty[$ donc bijective de $[0,+\infty[$ vers $[1,+\infty[$, d'après le théorème de la bijection monotone.

Soient $x \in [0,+\infty[$ et $y \in [1,+\infty[$.

On a :

$$\operatorname{ch} x = y \iff e^x + e^{-x} = 2y \iff e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$$

$$\iff e^x \text{ racine de } X^2 - 2yX + 1$$

$$\iff e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2-4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2-1}$$

$$\iff e^x = y + \sqrt{y^2-1} \quad \text{car } e^x \geq 1 \text{ car } x \geq 0$$

$$\iff x = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$$

Donc $\boxed{\forall y \in [1,+\infty[, \ \operatorname{argch}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)}$

7.(b) Soit $x \geq 1$.

On pose $\theta = \operatorname{argch}(x)$ donc $\theta \in [0,+\infty[$ et $x = \operatorname{ch}(\theta)$.

Alors $T_n(x) = T_n(\operatorname{ch}(\theta)) = \operatorname{ch}(n\theta)$

donc $\boxed{T_n(x) = \operatorname{ch}(n.\operatorname{argch} x)}$

7.(c) Pour $x \geq 1$, on a donc :

$$T_n(x) = \frac{e^{n.\operatorname{argch} x} + e^{-n\operatorname{argch} x}}{2} = \boxed{\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n}{2}}$$

7.(d) Soit $x \leqslant -1$.

Alors $-x \geqslant 1$ et on a aussi $T_n(x) = (-1)^n . T_n(-x)$

donc $T_n(x) = (-1)^n . \dfrac{(-x+\sqrt{x^2-1})^n + (-x-\sqrt{x^2-1})^n}{2}$

$$= \frac{(x-\sqrt{x^2-1})^n + (x+\sqrt{x^2-1})^n}{2}$$

On retrouve la formule précédente.

7.(e) Si $x \geqslant 1$, $T_n(x) = ch(n . argch\, x) \geqslant 1$

car $n . argch(x) \geqslant 0$.

Si $x \leqslant -1$: $T_n(x) = (-1)^n . T_n(-x)$ et $T_n(-x) \geqslant 1$.

donc $|T_n(x)| = |T_n(-x)| \geqslant 1$

Ainsi : $\boxed{\text{si } |x| \geqslant 1 \text{ alors } |T_n(x)| \geqslant 1}$