Correction du DM13 facultatif

Partie I

1.(a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $c - \frac{1}{n} < c$.

Or c est le plus petit majorant de E. Donc $c - \frac{1}{n}$ n'est pas un majorant de E.

Donc Non $(\forall x \in E, \ x \leq c - \frac{1}{n})$

ie : $\exists x_n \in E, \ x_n > c - \frac{1}{n}$.

Et comme $x_n \in E$: $x_n \leq c$

On a donc montré que : $\exists x_n \in E, \ c - \frac{1}{n} < x_n \leq c$

Par le théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = c$

Donc il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E qui converge vers c.

1.(b) On a $f(a) \leq d$ donc $a \in E$ donc $E \neq \emptyset$

De plus $E \subseteq [a, b]$ donc E est majoré par b.

Donc E est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée.

1.(c) Comme $a \in E$ on a $a \leq c$.

Comme b est un majorant de E : $c \leq b$.

Donc $c \in [a, b]$.

1.(d) Soit $(x_n)_n$ suite d'éléments de E qui converge vers c.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in E$ donc $f(x_n) \leq d$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = c$ et f est continue sur $[a,b]$ donc en c.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(c)$

Par stabilité des inégalités larges : $\underline{f(c) \leq d}$.

<u>1.(e)</u> On suppose $c < b$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $c + \frac{1}{n} > c$.

De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(c + \frac{1}{n} - b\right) = c - b < 0$

donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geq n_0$, $c + \frac{1}{n} - b < 0$

On a donc montré que $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geq n_0$, $c < c + \frac{1}{n} < b$.

Comme $c + \frac{1}{n} > c$ on a $c + \frac{1}{n} \notin E$.

Et comme $c + \frac{1}{n} \in [a,b]$: $f\left(c + \frac{1}{n}\right) > d$

De même qu'à la question précédente, la stabilité des inégalités larges et la continuité de f en c donne :

$$\underline{f(c) \geq d}$$

C'est encore vrai si $c = b$ car on a supposé $d \leq f(b)$.

<u>1.(f)</u> On a donc $d \leq f(c) \leq d$ donc $f(c) = d$.

Donc $\exists c \in [a,b]$, $f(c) = d$.

Ceci prouve que f vérifie la propriété P.

2.(a) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on définit $f_n : [0, 1-\frac{1}{n}] \longrightarrow \mathbb{R}$

par $f_n(x) = f(x+\frac{1}{n}) - f(x)$

On remarque que $f(1) - f(0) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f_n\left(\frac{k}{n}\right)$$

Comme $f(1) - f(0) = 0$ on a donc $\sum_{k=0}^{n-1} f_n(k/n) = 0$

Dans cette somme, les termes ne peuvent donc pas être tous >0 ou tous <0.

Il existe donc un terme ≤ 0 et un terme ≥ 0 :

$\exists (k,j) \in [\![0, n-1]\!]^2 ;\ f_n\left(\frac{k}{n}\right) \leq 0$ et $f_n\left(\frac{j}{n}\right) \geq 0$.

Donc la fonction f_n change de signe sur l'intervalle $[0, 1-\frac{1}{n}]$. Comme elle est continue sur cette intervalle (car f est continue sur $[0,1]$), elle vérifie la propriété P : elle s'annule donc sur l'intervalle $[0, 1-\frac{1}{n}]$.

$\exists c_n \in [0, 1-\frac{1}{n}] ;\ f(c_n + \frac{1}{n}) = f(c_n)$

2.(b) On veut montrer que :

$\forall x \in [0, 1-\alpha],\ f(x) \neq f(x+\alpha)$

Or $\forall x \in [0, 1-\alpha]$, $f(x+\alpha) = \cos\left(\frac{2\pi x}{\alpha} + 2\pi\right) - (x+\alpha)\left[\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right]$

$$= \cos\left(\frac{2\pi x}{\alpha}\right) - (x+\alpha)\cdot\left[\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right]$$

$$= f(x) - \alpha\cdot\left[\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right]$$

Il s'agit donc de montrer que $\alpha\cdot\left[\cos\left(\frac{2\pi}{a}\right) - 1\right] \neq 0$

Or $\alpha \neq 0$

et $\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) = 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{\alpha} = 0\ [2\pi] \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Z}$

donc $\frac{1}{\alpha} \notin \mathbb{N} \Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) \neq 1$

Donc on a montré que : $\forall x \in [0, 1-\alpha]$, $f(x+a) \neq f(x)$

Pourtant f est continue sur $[0,1]$ d'après les théorèmes généraux. Et $f(1) = 1 = f(0)$.

Partie II

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

D'après les th généraux, f est continue sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$ et vérifie donc la propriété P sur ces deux intervalles.

Si ($a > 0$ et $b > 0$) ou ($a < 0$ et $b < 0$) alors pour tout réel d compris entre $f(a)$ et $f(b)$: $\exists c \in [a,b]$, $f(c) = d$.

Reste à traiter le cas où $a \leq 0$ et $b > 0$ (le cas $a < 0$ et $b \geq 0$ étant similaire car f est impaire).

Soit λ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

On a donc $\lambda \in [-1,1]$ puisque f est à valeurs dans $[-1,1]$.

On peut donc poser $y = \arcsin(\lambda)$ et $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $y + 2n\pi \geq 2\pi - \frac{\pi}{2} > 0$ car $n \geq 1$

$$\text{donc } \frac{1}{y+2n\pi} > 0$$

De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{y+2n\pi} = 0$ donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, $0 < \frac{1}{y+2n_0\pi} < b$

Si on pose $c = \frac{1}{y+2n_0\pi}$ on a donc $c \in [a,b]$ et

$$f(c) = \sin(y + 2n_0\pi) = \sin y = \lambda.$$

Dans tous les cas : <u>f vérifie la propriété P.</u>

Supposons par l'absurde que f est continue en 0.

On a alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$

donc pour toute suite $(x_n)_n$ convergente vers 0 on a

$\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = 0$

Mais si $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq 0$

c'est absurde. Donc <u>f est discontinue en 0.</u>

2.(a) f est dérivable sur I donc continue sur I donc continue sur $[a,b]$.

D'après les th généraux, g est continue sur $[a,b]$.

Comme $[a,b]$ est un segment on sait donc g a un minimum global sur $[a,b]$:

$$\exists c \in [a,b] ; \quad g(c) = \inf_{x\in[a,b]} g(x)$$

2.(b) Par l'absurde supposons que $c = a$.

On a donc $\forall x \in]a,b]$, $g(a) \leq g(x)$

donc $f(a) - \alpha a \leq f(x) - \alpha x$

donc $\alpha.(x-a) \leq f(x) - f(a)$

donc $\alpha \leqslant \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ car $x - a > 0$

Par stabilité des inégalités larges lorsque $x \to a^+$:

$$\alpha \leqslant f'(a).$$

C'est absurde car $\alpha > f'(a)$. Donc $\underline{c \neq a}$.

De même on montre que $\underline{c \neq b}$.

2.(c) Donc g atteint son minimum global sur $[a,b]$ à l'intérieur de $[a,b]$. On sait donc que $g'(c) = 0$

Donc $\lambda = f'(c)$.

On a donc montré :

$$\forall \lambda \in]f'(a), f'(b)[, \ \exists c \in [a,b], \ f'(c) = \lambda.$$

C'est vrai si $\lambda = f'(a)$ ou $\lambda = f'(b)$ avec $c = a$ ou $c = b$.

Donc <u>f' vérifie P</u>.

<u>1. (d)</u> Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

f ne vérifie pas P et n'admet donc pas de primitive sur $\mathbb{R}$.

<u>Partie III</u>

<u>1. (a)</u> $E \neq \emptyset$ car $a \in E$.

$E \subseteq [a,b]$ donc E est majorée par b.

Donc E est une partie <u>non vide</u> et <u>majorée</u> de $\mathbb{R}$.

<u>1. (b)</u> $a \in E$ donc $a \leq \beta$
et b majore E donc $b \geq \beta$. Donc <u>$\beta \in [a,b]$</u>.

<u>1. (c)</u> f est continue sur $[a,b]$ donc en β : $\lim\limits_{x \to \beta} f(x) = f(\beta)$

donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in [\beta - \delta, \beta + \delta] \cap [a,b], |f(x) - f(\beta)| \leq \varepsilon$

Pour $\varepsilon = 1$:

$\exists \delta > 0, \forall x \in [\beta - \delta, \beta + \delta] \cap [a,b], |f(x) - f(\beta)| \leq 1$

1.(d) Comme $\beta - \delta < \beta$, $\beta - \delta$ n'est pas un majorant de E.

Donc $\exists c \in E$, $\beta - \delta < c \leq \beta$.

1.(e) Comme $c \in E$: f est bornée sur $[a, c]$ ie

$\exists M > 0$, $\forall x \in [a, c]$, $|f(x)| \leq M$

Mais si $x \in [c, \beta + \delta] \cap [a, b]$ alors $x \in [\beta - \delta, \beta + \delta] \cap [a, b]$

donc $|f(x)| = |f(x) - f(\beta) + f(\beta)| \leqslant |f(x) - f(\beta)| + |f(\beta)|$

$\leqslant 1 + |f(\beta)|$

Si on pose $C = \text{Max}(M, 1 + |f(\beta)|)$:

$\forall x \in \underbrace{[a, c] \cup ([c, \beta + \delta] \cap [a, b])}_{= [a, \beta + \delta] \cap [a, b]}$, $|f(x)| \leq C$

Donc f est bornée sur $[a, \beta + \delta] \cap [a, b]$.

1.(f) Supposons $\beta < b$.

En choisissant $\eta > 0$ tel que $\beta + \eta < b$ et $\beta + \eta < \beta + \delta$

on aurait f bornée sur $[a, \beta + \eta]$ donc $c' = \beta + \eta \in E$.

et $c' > \beta$

1.(g) C'est absurde donc $\beta = b$: f est bornée sur $\underbrace{[a, b + \delta] \cap [a, b]}_{= [a, b]}$

2.(a) La partie $\{f(x)\ ;\ x\in[a,b]\}=f([a,b])$ est non vide et est majorée d'après la question précédente.

Donc μ existe.

2.(b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Comme $\mu-\frac{1}{n}<\mu$ on a $\mu-\frac{1}{n}$ n'est pas un majorant de $f([a,b])$

donc $\exists x_n\in[a,b],\ \mu-\frac{1}{n}<f(x_n)<\mu$

car $\forall x\in[a,b],\ f(x)<\mu$

2.(c) Comme $\forall x\in[a,b],\ f(x)<\mu$

la fonction $\varphi : x\longmapsto \frac{1}{f(x)-\mu}$ est définie sur $[a,b]$.

Supposons φ bornée sur $[a,b]$:

$\exists M>0,\ \forall x\in[a,b],\ |\varphi(x)|\leq M$

Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ |\varphi(x_n)|\leq M$ donc la suite $(\varphi(x_n))_n$ est bornée.

Mais $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0>f(x_n)-\mu>-\frac{1}{n}$ donc $0<|f(x_n)-\mu|<\frac{1}{n}$

donc $|\varphi(x_n)|>n$

Donc par minoration : $\lim\limits_{n\to+\infty}|\varphi(x_n)|=+\infty$. Absurde.

Donc φ n'est pas bornée sur $[a,b]$.

2.(d) D'après les th généraux φ est continue sur $[a,b]$.

D'après 1. elle devrait être bornée, et ce n'est pas le cas.

On a donc une contradiction.

Donc $\exists x \in [a,b],\ f(x) = \mu$.

C'est-à-dire : f a un maximum global sur $[a,b]$.

2.(e) De même $-f$ a un maximum global sur $[a,b]$

et donc f a un minimum global sur $[a,b]$:

$$\max_{x\in[a,b]} \left(-f(x)\right) = -\min_{x\in[a,b]} f(x)$$

Partie IV

1. La partie $\{|P(z)|\ ;\ z \in \mathbb{C}\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée par 0. Donc m existe et $m \geqslant 0$

2.(a) Soit $z \in \mathbb{C}$.

On a $a_n z^n = P(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$

donc $|a_n| . |z|^n \leqslant |P(z)| + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| . |z|^k$

donc $|P(z)| \geqslant |z|^n \times \left(|a_n| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| . |z|^{k-n}\right)$

Or $\lim_{t \to +\infty} |a_n| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| . t^{k-n} - \frac{|a_n|}{2} = \frac{|a_n|}{2} > 0$

Donc $\exists M \geq 0,\ \forall t \geq M,\ |a_n| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| t^{k-n} \geq \frac{|a_n|}{2}$

Donc $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| \geq M \Longrightarrow |P(z)| \geq |z|^n \times \frac{|a_n|}{2}$

2.(b) Si $|z| \geq R$ alors $|z| \geq M$ donc $|P(z)| \geq |z|^n . \frac{|a_n|}{2}$

Mais $R \geq \frac{4m}{|a_n|}$ donc $\frac{|a_n|}{2} \geq \frac{2m}{R}$ donc $|P(z)| \geq |z|^n \frac{2m}{R} \geq 2m |z|^{n-1}$

Or aussi $|z| \geq 1$ donc $|z|^{n-1} \geq 1$.

Finalement : $|z| \geq R \Longrightarrow |P(z)| \geq 2m$

---

3. Si $z \in D$ alors $|z| \leq R$

donc $|P(z)| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| . |z|^k \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{n} |a_k| . R^k}_{\text{ne dépend pas de } z}$

donc $z \longmapsto |P(z)|$ est bornée sur D

---

4. $P(X+z_0)$ est la composée de P avec le polynôme $X+z_0$

c'est donc un polynôme de même degré que P : n.

Donc $\exists (b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n ;\ P(X+z_0) = b_0 + b_1 X + \dots + b_n X^n$ (12)

De plus $|P(z_0)| = m = |b_0|$

Comme $\deg P(X+z_0) = n$ on a $b_n \neq 0$

or $n \neq 0$ donc $\exists j \in [\![1, n]\!] ;\ b_j \neq 0$

5. Par propriété du module : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) \geq 0$

D'autre part si $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = |b_0 + \underbrace{b_k t^k \omega^k}_{= -b_0 |b_k|^2 t^k} + b_{k+1} t^{k+1} \omega^{k+1} + \dots + b_n t^n \omega^n|$$

$$\leq \underbrace{|b_0|}_{m} \cdot \underbrace{|1 - |b_k|^2 t^k|}_{\substack{= 1 - |b_k|^2 t^k \\ \text{si } |t| \text{ assez petite}}} + |b_{k+1}| \cdot |t|^{k+1} \cdot |\omega|^{k+1} + \dots + |b_n| \cdot \underbrace{|t|^n}_{\substack{\leq |t|^{k+1} \\ \text{si } |t| < 1}} \cdot |\omega|^n$$

Si $|t|$ assez petite et $|t| \leq 1$:

$$0 \leq f(t) \leq m \times (1 - |b_k|^2 \times t^k) + N \cdot |t|^{k+1}$$

où $N = |b_{k+1}| \cdot |\omega|^{k+1} + \dots |b_n| \cdot |\omega|^n \neq 0$ car $b_n \neq 0$ et $\omega \neq 0$

6. Si $\alpha \leq t \leq m \dfrac{|b_k|^2}{2N}$ alors $N.t \leq m \dfrac{|b_k|^2}{2}$

donc $0 \leq f(t) \leq m.\left(1 - |b_k|^2 . t^k\right) + m \dfrac{|b_k|^2}{2} t^k$

$$= m\left(1 - \frac{|b_k|^2}{2} t^k\right)$$

7. On peut toujours trouver $r_0 > 0$ tel que $0 < 1 - \dfrac{|b_k|^2}{2} r_0^k < 1$

et donc si $m > 0$ $f(r_0) < m$. c'est absurde.

Donc $m = 0$.

Donc $r_0 \omega + z_0$ est une racine de P.