Correction du DS1

Exercice 1

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $P(n)$ le prédicat $P(n)$: "$u_n = n$".

Initialisation Comme $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ on obtient que les prédicats $P(0)$ et $P(1)$ sont vrais.

Hérédité à 2 pas : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont tous les deux vrais.

On a donc $u_{n+1} = n+1$ et $u_n = n$.

De plus $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - n = n+2$

donc $P(n+2)$ est vrai.

ccl D'après le principe de récurrence à 2 pas :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n$$

2. $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que $A \subseteq B$.

Par l'absurde si $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$ alors il existerait $x \in A \cap \overline{B}$. Mais comme $A \subseteq B$ on aurait $x \in B \cap \overline{B}$ ie $x \in B$ et $x \notin B$, ce qui est absurde !

Donc $A \cap \overline{B} = \emptyset$.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que $A \cap \overline{B} = \emptyset$.

Soit $x \in A$. Comme $A \cap \overline{B} = \emptyset$ on a $x \notin \overline{B}$.

Donc $x \in B$.

Ceci prouve que : $A \subseteq B$.

3. Soit $x \in E$:

$x \in \overline{A \cup B} \iff x \notin A \cup B$

$\iff$ Non ($x \in A$ ou $x \in B$)

$\iff x \notin A$ et $x \notin B$

$\iff x \in \overline{A}$ et $x \in \overline{B}$

$\iff x \in \overline{A} \cap \overline{B}$

Donc $\boxed{\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}}$

On a de même : $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}} = A \cap B$

donc : $\boxed{\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}}$

4. (a) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$= (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$

$= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$

$= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B})$

$= \emptyset \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup \emptyset$

$\boxed{A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)}$

4. (b) On suppose que $A \Delta B = A \Delta C$.

Soit $x \in B$ fixé qcq.

Cas 1 $x \in A$ Alors $x \in A \cap B$ donc $x \notin A \Delta B$.

Donc $x \notin A \Delta C$

Donc Non ($x \in A \cup C$ et $x \notin A \cap C$)

ie $x \notin A \cup C$ ou $x \in A \cap C$.

Comme $x \in A$ on a donc $x \in A \cap C$ et donc $x \in C$.

<u>Cas 2</u> $x \notin A$ Alors $x \in B \setminus A$ donc $x \in A \Delta B$ donc $x \in A \Delta C$.

Donc $x \in A \cup C$ et $x \notin A \cap C$.

On a $x \in A \cup C$ et $x \notin A$ donc $x \in C$.

On peut dire que dans tous les cas $x \in C$.

Ainsi $B \subseteq C$.

Par symétrie des hypothèses: $C \subseteq B$.

Donc $\boxed{B = C}$

Exercice 2

1.(a) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ fixé qcq.

$$|f_1(x)+f_2(y)| = |x+y|$$

Donc f_1 vérifie (E).

1.(b) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ fixé qcq.

$$|f_2(x)+f_2(y)| = |-x-y| = |-(x+y)| = |x+y|$$

car $\forall t\in\mathbb{R},\ |-t|=|t|$

Donc f_2 vérifie (E)

2. (P_2) est vraie car :

$\forall x\in\mathbb{R},\ |f(x)|=|x| \iff \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=x$ ou $f(x)=-x$

3.(a) $|f(0)+f(0)| = |0+0|$

ie $2.|f(0)|=0$ donc $f(0)=0$

3.(b) $\forall x\in\mathbb{R},\ |f(x)+f(0)| = |x+0|$

donc $\forall x\in\mathbb{R},\ |f(x)|=|x|$

3.(c).i $\exists a\in\mathbb{R};\ f(a)\neq a$ et $\exists b\in\mathbb{R};\ f(b)\neq -b$

3.(c).ii Par l'absurde on suppose donc que
$\exists a \in \mathbb{R}, f(a) \neq a$ et $\exists b \in \mathbb{R}, f(b) \neq -b$.
D'après 2. on a donc $f(a) = -a$ et $f(b) = b$
Et d'après (E) :
$$|f(a) + f(b)| = |a+b|$$
donc $|-a+b| = |a+b|$
donc $-a+b = a+b$ ou $-a+b = -a-b$
donc $a = 0$ ou $b = 0$
donc $f(a) = 0 = a$ ou $f(b) = 0 = -b$ Absurde.
Donc $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x)$

---

4. Analyse Soit f vérifiant (E).
D'après ce qui précède : $f = f_1$ ou f_2
Synthèse D'après 1., f_1 et f_2 sont solutions de (E).
ccl (E) admet exactement 2 solutions : f_1 et f_2.