Correction du DS2

Exercice 1

On suppose que $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$ et que $B \cap \overline{A} = C \cap \overline{A}$.

But Mq $B = C$.

Soit $x \in B$ fixé qq.

Cas 1 $x \in A$. Alors $x \in A \cap B$.

Donc $x \notin A \cap \overline{B}$. Donc $x \notin A \cap \overline{C}$.

Comme $x \in A$ ceci donne : $x \notin \overline{C}$

ie : $x \in C$.

Cas 2 $x \notin A$. Cette fois $x \in B \cap \overline{A}$

Donc $x \in C \cap \overline{A}$. Donc $x \in C$.

Dans tous les cas : $x \in C$.

On vient de montrer que $B \subseteq C$. Les mêmes arguments montrent que $C \subseteq B$. Donc $\underline{B = C}$.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ le prédicat "$u_n = -2.3^n + 2^{n+1} + 3n2^{n-1}$"

Initialisation à 3 pas.

$-2 \times 3^0 + 2^1 + 0 = 0 = u_0$ donc $P(0)$ est vrai.

$-2 \times 3 + 2^2 + 3 = 1 = u_1$ donc $P(1)$ est vrai.

$-2 \times 3^2 + 2^3 + 3 \times 2 \times 2 = 2 = u_2$ donc $P(2)$ est vrai.

<u>Hérédité à 3 pas.</u> Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé pour lequel les prédicats $P(n)$, $P(n+1)$ et $P(n+2)$ sont vrais. Mq $P(n+3)$ est vrai.

On a $u_{n+3} = 7u_{n+2} - 16u_{n+1} + 12u_n$

$$\underset{P(n),\, P(n+1) \text{ et } P(n+2)}{=} 7\times\left(-2\times3^{n+2} + 2^{n+3} + 3(n+2)2^{n+1}\right) - 16\left(-2.3^{n+1} + 2^{n+2} + 3(n+1).2^{n}\right) + 12.\left(-2\times3^{n} + 2^{n+1} + 3n2^{n-1}\right)$$

$$= (-42+32-8)3^{n+1} + (7-8+3)2^{n+3} + \left(21(n+2) - 24(n+1) + 9n\right)2^{n+1}$$

$$= -18\times3^{n+1} + 2^{n+4} + (6n+18)2^{n+1}$$

Finalement : $u_{n+3} = -2\times3^{n+3} + 2^{n+4} + 3(n+3)2^{n+2}$

Donc $P(n+3)$ est vrai.

D'après le principe de récurrence à 3 pas on sait donc que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -2\times3^{n} + 2^{n+1} + 3n2^{n-1}}$

Exercice 3

$\boxed{(i) \Longrightarrow (iii)}$ On suppose que g est injective.

Comme $g \circ g = g$ on a : $\forall x \in E,\ g(g(x)) = g(x)$

Donc puisque g est injective : $\forall x \in E,\ g(x) = x$

ie : $\underline{g = id_E}$

$\boxed{(iii) \Longrightarrow (ii)}$ On suppose que $g = id_E$.

On sait alors que g est bijective, donc <u>surjective</u>.

$\boxed{(ii) \Longrightarrow (i)}$ On suppose que g est surjective.

Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tq $g(x_1) = g(x_2)$.

Comme g est surjective de E vers E :

$$\exists (t_1, t_2) \in E^2,\ x_1 = g(t_1) \text{ et } x_2 = g(t_2)$$

On réinjecte : $(g \circ g)(t_1) = (g \circ g)(t_2)$

Mais $g \circ g = g$ donc : $g(t_1) = g(t_2)$ ie $x_1 = x_2$.

Ceci prouve que g <u>est injective</u>.

On en déduit que

$$\begin{tikzcd}
 & (i) \arrow[dl, Leftrightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
(ii) \arrow[rr, Leftrightarrow] & & (iii)
\end{tikzcd}$$

Exercice 4

$A_1 = \emptyset$ et $B_1 = \{0\}$

$A_2 = \{1\}$ et $B_2 = \{0\}$

$A_3 = \{1\}$ et $B_3 = \{0; 1\}$

$A_4 = \{1; 2\}$ et $B_4 = \{0\}$

$A_5 = \{1\}$ et $B_5 = \{0; 1; 2\}$

$A_6 = \{1; 2; 3\}$ et $B_6 = \{0; 2\}$

$A_7 = \{1; 3\}$ et $B_7 = \{0; 1; 3\}$

$A_8 = \{1; 2; 4\}$ et $B_8 = \{0\}$.

On voit que : $B_1 = B_2 = B_4 = B_8 = \{0\}$.

On pourrait conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N},\ B_{2^n} = \{0\}$

Exercice 5

1. On donne les partitions réalisant le produit maximal :

$2 = 2$

$3 = 3$

$4 = 2+2 = 4$

$5 = 2+3$

$6 = 3+3$

$7 = 3+4 = 3+2+2$

$8 = 2+3+3$

$9 = 3+3+3$

2.(a) Par l'absurde on suppose que $a_k \geq 5$.

Alors si on remplace a_k par $3+(a_k-3)$ on obtient un produit plus grand puisque $3.(a_k-3) = a_k + \underbrace{2a_k - 9}_{>0} > a_k$

c'est impossible. Donc $a_k \leq 4$.

Et donc $\underline{1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq 4}$

2.(b) Comme $2 \times 2 = 4$ remplacer 4 par $2+2$ ne change pas le produit.

On peut donc supposer que $\underline{1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq 3}$

2.(c) Si $a_1 = 1$ (par l'absurde) la partition

$n = (1+a_1) + a_2 + \dots + a_k$ donne un produit

$(1+a_1)a_2 \times \dots \times a_k > a_1 \times a_2 \times \dots \times a_k$ ce qui est absurde.

Donc $\underline{a_1 \geq 2}$ et donc $\underline{2 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq 3}$

2.(d) S'il existe trois termes égaux à 2 :

$$n = \ldots + 2 + 2 + 2 + \ldots$$

on peut les remplacer par $3+3$
ce qui donnerait un produit supérieur.

Donc il y a plus deux termes égaux à 2.

3. • Si $n \equiv 0\ [3]$: $\exists k \in \mathbb{N}^*,\ n = 3k$.

La partition qui donne le produit maximal
est $n = 3 + 3 + \ldots + 3$

et le produit vaut $3^k = 3^{n/3}$

• Si $n \equiv 1\ [3]$: $\exists k \in \mathbb{N}^*,\ n = 3k+1$

La partition qui donne le produit maximal

est $n = 2 + 2 + \underbrace{3 + \ldots + 3}_{k-1 \text{ fois}}$

et le produit vaut $4 \times 3^{k-1} = 4 \times 3^{(n-\ )/3}$

• Si $n \equiv 2\ [3]$: $\exists k \in \mathbb{N}^*,\ n = 3k+2$

La partition qui donne le produit maximal

est $n = 2 + \underbrace{3 + \ldots + 3}_{k \text{ fois}}$

et le produit vaut $2 \times 3^k = 2 \times 3^{(n-2)/3}$