Correction du DS4

Exercice 1

1. C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et homogène.

Équation caractéristique : $z^2 - 2z + 2 = 0$

$$\Delta = -4 \quad \text{et} \quad z = 1 \pm i$$

$$\boxed{\text{donc } y : t \longmapsto e^{t} \times \left(\lambda \cos(t) + \mu \sin(t)\right) \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.}$$

2. • Pour $y'' - 2y' + 2y = \frac{1}{2} e^{(1+5i)t}$.

$1+5i$ n'est pas racine de $z^2 - 2z + 2 = 0$ donc on cherche y sous la forme $y : t \longmapsto C e^{(1+5i)t}$ où $C \in \mathbb{C}$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = C \times (1+5i) \times e^{(1+5i)t}$$

$$y''(t) = C \times (-24+10i) \times e^{(1+5i)t}$$

Alors $y'' - 2y' + 2y = \frac{1}{2} e^{(1+5i)t}$ donne $C \times \left[2 - 2(1+5i) + (-24+10i)\right] = \frac{1}{2}$

donc $C \times (-24) = \frac{1}{2}$ donc $C = -\frac{1}{48}$

Ainsi $\boxed{y : t \longmapsto -\frac{1}{48} e^{(1+5i)t} \text{ est solution particulière}}$.

• Pour $y''-2y'+2y=\frac{1}{2}e^{(1-i)t}$ ②

$1-i$ est racine simple de $z^2-2z+2=0$

donc cherche y sous la forme $y(t)=Cte^{(1-i)t}$

$\forall t\in\mathbb{R}$, $y'(t)=C\times(1+(1-i)t)e^{(1-i)t}$

$y''(t)=C\times(2-2i-2it)e^{(1-i)t}$

$y''-2y'+2y=\frac{1}{2}e^{(1-i)t}$ donne $\forall t\in\mathbb{R}$, $C\times(2-2i-2it-2-2(1-i)t+2t)=\frac{1}{2}$

donc $C\times(-2i)=\frac{1}{2}$ donc $C=\frac{-1}{4i}=\frac{i}{4}$

donc $\boxed{y: t\longmapsto \frac{i}{4}te^{(1-i)t} \text{ est une solution particulière}}$.

3. $e^t\times\sin(2t)\times\cos(3t)=\frac{e^t}{2}\sin(5t)-\frac{e^t}{2}\sin t$

$=\mathrm{Im}\left(\frac{1}{2}e^{(1+5i)t}+\frac{1}{2}e^{(1-i)t}\right)$

Par superposition une solution particulière de $y''-2y'+2y=e^t.\sin(2t)\cos(3t)$ est donc

$y: t\longmapsto \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{48}e^{(1+5i)t}+\frac{i}{4}te^{(1-i)t}\right)=-\frac{e^t}{48}\sin(5t)+\frac{te^t}{4}\cos t$

$\boxed{\text{Les solutions sont de la forme } y: t\longmapsto(\lambda\cos t+\mu\sin t)e^t-\frac{e^t}{48}\sin(5t)+\frac{te^t}{4}\cos t \text{ où } (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2}$

PROBLEME

Partie I

1. On a $u_0 > 1$ donc $u_0 \geq 1$.

Supposons que $u_n \geq 1$ pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

alors $u_n^2 \geq 1^2 = 1$ donc $u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_n^2}{2} \geq \dfrac{1+1}{2} = 1$

D'après le principe de récurrence, on a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 1}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n^2 + u_n}{2} - u_n = \dfrac{\overbrace{u_n}^{\geq 0}\overbrace{(u_n - 1)}^{\geq 0}}{2} \geq 0$ pour tout $n \geq 0$

Donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$

3.(a) On a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_0$ car $(u_n) \nearrow$

donc par prolongement des inégalités. $l \geq u_0$

Or $u_0 > 1$ donc $\boxed{l > 1}$

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ donc par

opérations sur les limites et par unicité de la limite

La relation $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + u_n}{2}$ donne $\boxed{l = \dfrac{l^2+l}{2}}$

On a donc $l^2 = l$ i.e. $l = 0$ ou $l = 1$.

Ces deux valeurs sont impossibles car $l > 1$.

On a donc une contradiction.

3.(b) (u_n) n'est donc pas convergente. Comme elle est croissante, le théorème de la limite monotone permet de conclure que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

Partie II

1.(a) $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2^{n+1}} \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{2}\right) - \dfrac{1}{2^n} \ln\left(\dfrac{u_n}{2}\right)$

$= \dfrac{1}{2^{n+1}} \left[\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{2}\right) - 2 \ln\left(\dfrac{u_n}{2}\right) \right] = \dfrac{1}{2^{n+1}} \ln\left(\dfrac{2u_{n+1}}{u_n}\right)$

$= \dfrac{1}{2^{n+1}} \ln\left(\dfrac{u_n + u_n^2}{u_n^2}\right) = \dfrac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$

or $1 + \dfrac{1}{u_n} > 1$ car $u_n \geq 0$ donc $\ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right) \geq 0$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n \geq 0$ Ainsi $\boxed{(v_n) \text{ est croissante}}$

1 (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} \leq u_n^2 \iff \frac{u_n^2 + u_n}{2} \leq u_n^2$$

$$\iff \frac{u_n^2 - u_n}{2} \leq 0$$

$$\iff u_n (u_n - 1) \leq 0$$

or $u_n \geq 1$ donc $\underbrace{u_n}_{\geq 0} \underbrace{(u_n - 1)}_{\leq 0} \leq 0$

En remontant les $\iff$: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq u_n^2}$

1 (c) Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

mais $u_n \geq 1$ donc $\frac{1}{u_n} \leq 1$

donc $\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \leq 2$ car $\ln \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1}} \ln 2}$

1 (d) Soit $n \geq 1$.

Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$v_{k+1} - v_k \leq \frac{1}{2^{k+1}} \ln 2$$

donc $\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)}_{v_n - v_0} \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \cdot \ln 2}_{\ln 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}}$ par Σ d'inégalités

Ainsi : $\boxed{v_n \leq v_0 + \ln 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \text{ pour } n \geq 1}$

1 (e) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 2 - \frac{1}{2^n} - 1$$

$$= 1 - \frac{1}{2^n} \leq 1$$

Donc $\forall n \geq 1$, $v_n \leq \underbrace{v_0 + \ln 2}_{\text{ne dépend pas de } n}$

Ceci prouve que (v_n) est croissante majorée.

D'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(v_n) \text{ converge}}$

2(a) On étudie la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x) - x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Elle est dérivable et :

$$\forall x>0,\quad f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} < 0$$

donc f strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	0	$+\infty$
f	0	$\searrow$

On a donc

$$\forall x>0,\quad f(x) \leq 0$$

donc $\forall x>0,\ \ln(1+x) \leq x$

2.(b) Les questions 1.(a), 1.(c) et 2.(a) donnent :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 \leq v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1} \cdot u_n}$$

2.(c) On a pour tout $k \in [\![1, p]\!]$:

$$0 \leq v_{n+k} - v_{n+k-1} \leq \frac{1}{2^{n+k} \cdot u_{n+k-1}}$$

Mais $(u_n) \nearrow$ donc $u_{n+k-1} \geq u_n > 0$

donc $$0 \leq v_{n+k} - v_{n+k-1} \leq \frac{1}{2^{n+k} \cdot u_n}$$

Par somme d'inégalités :

$$0 \le \sum_{k=1}^{p} \left(v_{n+k} - v_{n+k-1}\right) \le \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^{n+k} \cdot u_n}$$

donc $\boxed{0 \le v_{n+p} - v_n \le \frac{1}{u_n} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^{n+k}}}$

<u>2.(d)</u> $\displaystyle \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^{n+k}} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^k}$

$$= \frac{1}{2^n}\left(\frac{1 - \frac{1}{2^{p+1}}}{1 - \frac{1}{2}} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right) \xrightarrow[p \to +\infty]{} \frac{1}{2^n}$$

Par prolongement de l'inégalité du 2.(c) lorsque $p \to +\infty$ on a :

$$\boxed{0 \le \alpha - v_n \le \frac{1}{2^n \cdot u_n}}$$

2.(e) $v_n = \frac{1}{2^n} \ln \frac{u_n}{2}$

donc $\frac{u_n}{2} = e^{2^n \cdot v_n}$ i.e $\boxed{u_n = 2e^{2^n \cdot v_n}}$

2.(f) ⚠ On ne peut pas faire le raisonnement suivant.

$\lim v_n = \alpha$ donc $\lim \frac{u_n}{2e^{2^n v_n}} = \cancel{\lim \frac{u_n}{2e^{2^n \alpha}}}$

contre-ex: $u_n = v_n = \frac{1}{n}$ de $\alpha = \lim \frac{1}{n} = 0$

on aurait $\lim \frac{v_n}{u_n} = \lim \frac{\alpha}{u_n} = \lim 0 = 0$

absurde car $\lim \frac{v_n}{u_n} = 1$ puisque $u_n = v_n$

On procède donc par encadrement:

On a $\forall n$, $0 \leq \alpha - v_n \leq \frac{1}{2^n u_n}$

donc $\forall n$, $0 \leq 2^n \cdot (\alpha - v_n) \leq \frac{1}{u_n}$

comme $\lim u_n = +\infty$, on a $\lim \frac{1}{u_n} = 0$

et donc par encadrement: $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n \cdot (\alpha - v_n) = 0$

On $\dfrac{u_n}{2e^{\alpha 2^n}} = \dfrac{2e^{v_n 2^n}}{2e^{\alpha 2^n}} = e^{2^n(v_n - \alpha)}$

or $\lim 2^n . (v_n - \alpha) = - \lim 2^n(\alpha - v_n) = -0 = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{2^n . (v_n - \alpha)} = \lim\limits_{X \to 0} e^X = e^0 = 1$

Ainsi : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{2e^{\alpha 2^n}} = 1}$

EXERCICE 3

1 (a) Etudions la fonction $f : x \longmapsto \ln x + x$

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & 0 & & x_n & & +\infty \\
\hline
 & & & & & +\infty \\
f & & & n & \nearrow & \\
 & -\infty & \nearrow & & &
\end{array}$$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty + 0 = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

f est <u>continue</u> et <u>strictement croissante</u> sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ vers $f(\mathbb{R}_+^*) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$ alors $n \in \mathbb{R}$ donc $\exists !\, x_n > 0$ tq $f(x_n) = n$

donc $\boxed{(E_n) \text{ a une unique solution } x_n > 0.}$

De plus $f(1) = 1 \leq f(x_n) = n$

Comme f str-t $\nearrow$: $\boxed{1 \leq x_n}$

Et $f(n) = n + \ln n \geqslant n = f(x_n)$ car $\ln n \geqslant 0$ puisque $n \in \mathbb{N}$

donc $\boxed{x_n \leq n}$

1.(b) $f(x_{n+1}) = n+1 \geqslant n = f(x_n)$

donc $x_{n+1} \geqslant x_n$.

Donc $\boxed{(x_n)_{n \geqslant 1} \text{ est croissante}}$

1.(c) On a vu au 1.(a) que : $1 \leq x_n \leq n$.

Comme ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$: $0 \leq \ln x_n \leq \ln n$

et donc : $0 \leq \frac{\ln(x_n)}{n} \leq \frac{\ln n}{n}$

Par croissances comparées : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

Par le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(x_n)}{n} = 0}$

1.(d) Par définition de x_n : $\ln x_n + x_n = n$

Donc : $\frac{\ln(x_n)}{n} = 1 - \frac{x_n}{n}$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{x_n}{n}\right) = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x_n}{n} = 1$

Ce qui prouve : $\boxed{x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n}$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \lim\limits_{n \to +\infty} n = \boxed{+\infty}$

2.(a) On a vu que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = 1$

Or $\ln x_n = \ln\left(n \cdot \frac{x_n}{n}\right) = \ln n + \ln\left(\frac{x_n}{n}\right)$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln(n)} = \frac{0}{+\infty} = 0$ donc $\ln\left(\frac{x_n}{n}\right) = \underset{n\to+\infty}{o}(\ln n)$

donc $\boxed{\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n}$

2.(b) $x_n - n = -\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{-\ln n}$

2.(c) $x_n - n + \ln(n) = \ln(n) - \ln(x_n) = -\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)$

$= -\ln\left(1 + \frac{x_n - n}{n}\right)$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n - n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{x}{n} - 1\right) = 1 - 1 = 0$

donc $\ln\left(1 + \frac{x_n - n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x_n - n}{n} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\ln n}{n}$

Ainsi $\boxed{x_n - n + \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}}$

3.(a) On étudie la fonction $\varphi : x \longmapsto \ln x - x + 1$

φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

$\varphi'(x)$ est du signe de $1 - x$

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
φ		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Donc $\forall x > 0, \varphi(x) \leq 0$

ie $\boxed{\forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1}$

3.(b) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g'(x) = -\frac{1}{x} < 0$

donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

De plus : $g(x) = x \iff n - \ln(x) = x$

$\iff x$ solution de (E_p)

$\iff x = x_n$

donc x_n est l'unique point fixe de g.

3.(c) On a

x	0	1	n	$+\infty$
g	$\|\|$ $+\infty$	n	$n - \ln n$	$\searrow$ $-\infty$

Donc si $x \in [1, n]$ alors $g(x) \in [n - \ln n, n]$.

Mais d'après 3. (a) on a $\ln n \leq n - 1$

donc $1 \leq n - \ln n$

Ainsi si $x \in [1, n]$ alors $g(x) \in [1, n]$.

Donc l'intervalle $[1, n]$ est g-stable. De plus $u_0 \in [1, n]$.

On peut donc en déduire que la suite (u_k) est bien définie et :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_k \leq n}$$

3. (d)

Supposons $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ avec $x \leq y$.

Comme $g \searrow$: $g(x) \geq g(y)$

puis : $(g \circ g)(x) \leq (g \circ g)(y)$

Ainsi $g \circ g$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Si $u_0 \leq u_2$:

  on a $g\circ g(u_0) \leq g\circ g(u_2)$ ie $u_2 \leq u_4$

  Par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{2k} \leq u_{2k+2}$

  Donc $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante.

  De plus $g(u_0) \geq g(u_2)$ ie $u_1 \geq u_3$

  puis par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{2k+1} \geq u_{2k+3}$

  Donc $(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante

- Si $u_0 > u_2$: de même $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante

  et $(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante.

- Dans tous les cas <u>(u_{2k}) et (u_{2k+1}) sont monotones de sens contraire</u>.

  Elles sont à valeurs dans $[1, n]$ donc elles sont bornées.

  D'après le théorème de la limite monotone, <u>elles sont convergentes</u>.

<u>3.</u>(e) Comme $\forall k \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_k \leq p$

On a $\boxed{1 \leq \alpha \leq p}$ et $\boxed{1 \leq \beta \leq p}$ par prolongement des inégalités.

De plus $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{2k+1} = g(u_{2k})$ et $u_{2k+2} = g(u_{2k+1})$

Si $k \to +\infty$: $\boxed{\beta = g(\alpha)}$ et $\boxed{\alpha = g(\beta)}$ car g continue en α et β

3.(f) Etudions $h : x \mapsto x - \ln x$.

h est dérivable sur $[1, +\infty[$ et $h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

donc $h'(x) > 0$ sauf si $x = 1$

x	1		$+\infty$
h	1	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} x \times \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty \times (1 - 0) = +\infty$$

h est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

donc bijective de $[1, +\infty[$ vers $[1, +\infty[$.

De plus $g(\alpha) = \beta$ donne $p - \ln \alpha = \beta$

$g(\beta) = \alpha$ donne $p - \ln \beta = \alpha$

On soustrait : $\ln \beta - \ln \alpha = \beta - \alpha$

donc $h(\beta) = h(\alpha)$

donc $\boxed{\alpha = \beta}$ puisque h bijective.

3. (g) Comme les sous-suites des rangs pairs et impairs convergent vers la même limite α, on sait d'après le théorème des suites recourantes que (u_k) converge elle aussi vers α.

Comme : $\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+1} = g(u_k)$

On a lorsque $k \to +\infty$: $\alpha = g(\alpha)$

Donc d'après 3. (b) : $\alpha = x_p$

Donc $\boxed{\lim_{k \to +\infty} u_k = x_p}$

3. (h) On choisit d'approcher x_n par u_{1000}, et de partir de $u_0 = 1$

```
def suite(n):
    u = 1
    for k in range(1000):
        u = n - log(u)
    return u
```

La fonction log a été importée du module math :

```
from math import log
```

EXERCICE 4

Partie I

1.(a) Comme $k \geqslant n+1$:

$$k! = \underbrace{k \times (k-1) \times \dots \times (n+2)}_{\substack{\geqslant 2 \times 2 \times \dots \times 2 \\ k-(n+2)+1 \text{ termes}}} \times \underbrace{(n+1) \times \dots \times 2 \times 1}_{=(n+1)!}$$

donc $\boxed{k! \geqslant 2^{k-n-1} \times (n+1)!}$

1.(b) $N \geqslant n+1$.

Alors $x_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}}_{=x_n} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k!}}_{\geqslant 0}$ donc $\boxed{x_N \geqslant x_n}$

D'autre part d'après 1.(a) on a :

$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k!} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{2^{k-n-1} \times (n+1)!} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \sum_{k=n+1}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{N-n}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{(n+1)!} \times \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{N-n}\right)$$

Donc $\boxed{x_N \leqslant x_n + \frac{2}{(n+1)!} \times \left(1 - \frac{1}{2^{N-n}}\right)}$

On a $x_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} e$ et $x_n \xrightarrow[N \to +\infty]{} x_n$

et $x_n + \frac{2}{(n+1)!} \times \left(1 - \frac{1}{2^{N-n}}\right) \xrightarrow[N \to +\infty]{} x_n + \frac{2}{(n+1)!}$

Donc par prolongement des inégalités :

$$\boxed{x_n \leqslant e \leqslant x_n + \frac{2}{(n+1)!}}$$

1.(c) On a $x_n \leqslant e \leqslant x_n + \dfrac{2}{(n+1)!}$

donc $n!\,x_n \leqslant n!\,e \leqslant n!\,x_n + \dfrac{2}{n+1}$

Posons donc $\varepsilon_n = n!\,x_n$.

On a $\varepsilon_n \leqslant n!\,e \leqslant \varepsilon_n + \dfrac{2}{n+1}$

et $\varepsilon_n = n!\,x_n = n! \times \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \underbrace{n(n-1)\times\cdots\times(k+1)}_{\in \mathbb{N}}}_{\in \mathbb{N}}$

Donc ε_n convient.

2.(a) On suppose que $\alpha_n - \beta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Alors $\cos(\alpha_n) - \cos(\beta_n) = 2\sin\left(\dfrac{\alpha_n+\beta_n}{2}\right) \times \sin\left(\dfrac{\beta_n-\alpha_n}{2}\right)$

Or $\dfrac{\beta_n-\alpha_n}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\dfrac{0}{2} = 0$ et $\sin x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

donc par composée $\sin\left(\dfrac{\beta_n-\alpha_n}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

De plus $\forall n \geqslant 1$, $\left|2\sin\left(\dfrac{\alpha_n+\beta_n}{2}\right)\right| \leqslant 2$

donc la suite $\left(2\sin\left(\dfrac{\alpha_n+\beta_n}{2}\right)\right)_n$ est bornée.

Donc $2\sin\left(\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}\right)\times\sin\left(\frac{\beta_n-\alpha_n}{2}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

ie $\boxed{\cos(\alpha_n)-\cos(\beta_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0}$

2.(b) On a $2\pi.\varepsilon_n \leqslant 2\pi n!e \leqslant 2\pi\varepsilon_n+\frac{4\pi}{n+1}$

donc $0\leqslant 2\pi n!e-2\pi\varepsilon_n\leqslant\frac{4\pi}{n+1}$

Or $\frac{4\pi}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc par encadrement $2\pi n!e-2\pi\varepsilon_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

et d'après 2.(a) : $\cos(2\pi n!e)-\underbrace{\cos(2\pi\varepsilon_n)}_{=1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

car $\varepsilon_n\in\mathbb{N}$

donc $\boxed{\cos(2\pi n!e)\xrightarrow[n\to+\infty]{}1}$

2.(c) $\varepsilon_n=n!\times x_n$ donc $\varepsilon_{n+1}=(n+1)!\times x_{n+1}=(n+1)!\times\left(x_n+\frac{1}{n+1}\right)$

On a $\varepsilon_0=1$, $\varepsilon_1=2$, $\varepsilon_2=5$, $\varepsilon_3=16$....

Donc il semblerait que ε_n soit de parité contraire à n.

Montrons le par récurrence.

C'est vrai si $n=0$.

Supposons que ce soit vrai à un rang $n\in\mathbb{N}$ fixé.

Cas 1 si n est pair alors ε_n est impair et $n+1$ aussi.

Donc $(n+1)\varepsilon_n$ est impair et donc ε_{n+1} est pair

Cas 2 si n est impair alors ε_n et $n+1$ sont pairs.

Donc $(n+1)\varepsilon_n$ est pair et donc ε_{n+1} est impair.

Dans tous les cas : ε_{n+1} est de parité contraire à $n+1$.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \varepsilon_n \text{ est de parité contraire à } n.}$

2.(d) Supposons que $\cos(n!\pi e) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ -1 \leq \cos(n!\pi e) \leq 1$ on a $l \in [-1,1]$.

Posons $u_n = \cos(n!\pi e)$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n\pi \leq n!\pi e \leq \varepsilon_n\pi + \frac{2\pi}{n+1}$

$$0 \leq n!\pi e - \varepsilon_n\pi \leq \frac{2\pi}{n+1}$$

Donc par encadrement : $n!\pi e - \varepsilon_n\pi \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc d'après 2.(a) : $\underbrace{\cos(n!\pi e)}_{=u_n} - \cos(\varepsilon_n\pi) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Si $n \in \mathbb{N}$, $2n$ est pair donc ε_{2n} entier impair

donc $\cos(\varepsilon_{2n}\pi) = \cos(\pi) = -1$

donc $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$

donc $l = -1$

de même $2n+1$ est impair donc ε_{2n+1} entier pair

donc $\cos(\varepsilon_{2n+1}\pi) = \cos(0) = 1$

donc $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $l = 1$.

Ainsi $-1 = 1$. Absurde.

Donc $\boxed{\text{la suite } (\cos(n!\pi e))_n \text{ n'a pas de limite.}}$

3.(a) On suppose que $\frac{x}{2\pi} \in \mathbb{Q}$

ie $\exists (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $x = 2\pi \frac{a}{b}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $n! x = 2\pi \frac{a.n!}{b}$

Or si $n \geqslant b$ alors $\frac{n!}{b} \in \mathbb{N}$ et donc $\frac{a.n!}{b} \in \mathbb{Z}$

alors $\cos(n!x) = \cos\left(2\pi \frac{a n!}{b}\right) = 1$ dès que $n \geqslant b$

et donc $\boxed{\cos(n!x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$

3.(b) On suppose que $\frac{e}{2} \in \mathbb{Q}$ ie $\frac{e.\pi}{2\pi} \in \mathbb{Q}$

Alors d'après 3.(a) : $\cos(n! e\pi) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

c'est absurde puisque cette suite n'a pas de limite d'après 2.(d)

Donc $\frac{e}{2} \notin \mathbb{Q}$.

Si $e \in \mathbb{Q}$ alors $\frac{e}{2} \in \mathbb{Q}$ donc par contraposée, comme $\frac{e}{2} \notin \mathbb{Q}$ on est sûr que $\boxed{e \notin \mathbb{Q}}$

Partie II

1.(a) $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}\right) = \frac{1}{p!}-\frac{1}{n!}$ par télescopage

De plus $\displaystyle s_n - s_p = \sum_{k=p+1}^{n} \frac{a_k}{k!}$

Mais $\forall k \in [\![p+1, n]\!]$, $0 \leqslant a_k \leq k-1$

donc $0 \leqslant \dfrac{a_k}{k!} \leq \dfrac{k-1}{k!}$

Donc par somme d'inégalités : $\displaystyle 0 \leqslant \sum_{k=p+1}^{n} \frac{a_k}{k!} \leqslant \sum_{k=p+1}^{n} \frac{k-1}{k!}$

ie : $0 \leqslant s_n - s_p \leqslant \dfrac{1}{p!} - \dfrac{1}{n!}$.

1.(b) En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant s_{n+1} - s_n$

donc $(s_n)_n$ est croissante.

Et $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0, 1\}$, $n > 1$ donc $0 \leqslant s_n - s_1 \leqslant \dfrac{1}{1!} - \dfrac{1}{n!}$

donc $s_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n!} \leqslant 2$

Donc $(s_n)_n$ est majorée.

D'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(s_n)_n \text{ converge.}}$

1.(c) On a $\forall n \geq p+1$: $0 \leq s_n - s_p \leq \frac{1}{p!} - \frac{1}{n!}$

donc $s_p \leq s_n \leq s_p + \frac{1}{p!} - \frac{1}{n!}$

Or $s_p \xrightarrow[n \to +\infty]{} s_p$, $s_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} L_a$

et $s_p + \frac{1}{p!} - \frac{1}{n!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} s_p + \frac{1}{p!}$

donc par prolongement des inégalités : $\boxed{s_p \leq L_a \leq s_p + \frac{1}{p!}}$

.() $a_1 = \left\lfloor \frac{\theta}{2\pi} \right\rfloor \in \mathbb{Z}$

et si $n \geq 2$: $n\frac{\theta}{2\pi} - 1 < a_n \leq n\frac{\theta}{2\pi}$

or $\theta = \arccos(\ell) \in [0, \pi]$ donc : $-1 < a_n \leq \frac{n}{2} < n$

et $a_n = \left\lfloor \frac{n\theta}{2\pi} \right\rfloor \in \mathbb{Z}$ donc : $0 \leq a_n \leq n-1$

On a donc $\underline{a_1 \in \mathbb{Z}}$ et $\underline{\forall n \geq 2, \ a_n \in [\![0, n-1]\!]}$.

2.(b) On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n\theta}{2\pi} - 1 < a_n \leq \frac{n\theta}{2\pi}$

$\theta - \frac{2\pi}{n} \leq 2\pi \frac{a_n}{n} \leq \theta$

donc par encadrement : $\boxed{2\pi \frac{a_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \theta}$

2.(c) D'après 1.(c) on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{n+1} \leqslant L_a \leqslant S_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\text{donc } n!\, S_{n+1} \leqslant n!\, L_a \leqslant n!\, S_{n+1} + \frac{1}{n+1}$$

Mais $n! \times S_{n+1} = n! \times \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{k!} = n! \times S_n + \frac{a_{n+1}}{n+1}$

Posons $\varepsilon_n = n! \times S_n$.

Alors $\varepsilon_n + \frac{a_{n+1}}{n+1} \leqslant n! \times L_a \leqslant \varepsilon_n + \frac{a_{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1}$

et $\varepsilon_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!} \times a_k = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{a_k}_{\in \mathbb{N}} \times \underbrace{n(n-1) \times \dots \times (k+1)}_{\in \mathbb{N}}$

donc $\varepsilon_n \in \mathbb{N}$.

2.(d) Si $x = 2\pi L_a$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2\pi \varepsilon_n + 2\pi \frac{a_{n+1}}{n+1} \leqslant n! \times x \leqslant 2\pi \varepsilon_n + 2\pi \frac{a_{n+1}}{n+1} + \frac{2\pi}{n+1}$$

$$0 \leqslant n!\, x - \left(2\pi \frac{a_{n+1}}{n+1} + 2\pi \varepsilon_n\right) \leqslant \frac{2\pi}{n+1}$$

et $\frac{2\pi}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $2\pi\, n! \times L_a - \left(2\pi \varepsilon_n + 2\pi \frac{a_{n+1}}{n+1}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

D'après I.2.(a) : $\cos(n! \times x) - \cos\left(2\pi \frac{a_{n+1}}{n+1} + 2\pi \varepsilon_n\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

or $\cos\left(2\pi \frac{a_{n+1}}{n+1} + 2\pi \varepsilon_n\right) \underset{\varepsilon_n \in \mathbb{Z}}{=} \cos\left(2\pi \frac{a_{n+1}}{n+1}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \cos(\theta) = \ell$

Donc $\boxed{\cos(n! \times x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell}$