Correction du DS6

Exercice 1

1. $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ donc $x.\cos x = x - \frac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$

On a donc $\sin x - x.\cos x = x - \frac{x^3}{6} - x + \frac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$

$$= \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$

et donc $\sin x - x.\cos x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{3}$

D'autre part $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $\ln(1+x^2) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$

donc $x.\ln(1+x^2) \underset{x\to 0}{\sim} x^3$

Par quotient d'équivalents : $\frac{\sin x - x.\cos x}{x.\ln(1+x^2)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{3x^3}$

$$\underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{3}$$

Et donc $\boxed{\frac{\sin x - x.\cos x}{x.\ln(1+x^2)} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{3}}$

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$

donc $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + \underset{x\to +\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)$

Donc $x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 - \frac{1}{6} + \underset{x \to +\infty}{o}(1)$

donc $x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2 = -\frac{1}{6} + \underset{x \to +\infty}{o}(1)$

Donc $x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2 \underset{x \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{6}$

On a donc :

$$\boxed{x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2 \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\frac{1}{6}}$$

Exercice 2

1. On a $\ln(x_n) = \ln(y_n) + \ln\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$

Mais $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} y_n$ donc $\frac{x_n}{y_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\ln\left(\frac{x_n}{y_n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Et $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ donc $\ln(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} -\infty & \text{si } l=0 \\ \ln l & \text{si } l>0 \\ +\infty & \text{si } l=+\infty \end{cases}$

Par quotients de limites : $\dfrac{\ln\left(\frac{x_n}{y_n}\right)}{\ln(y_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

(on évite la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ car $\ln l \neq 0$ car $l \neq 1$)

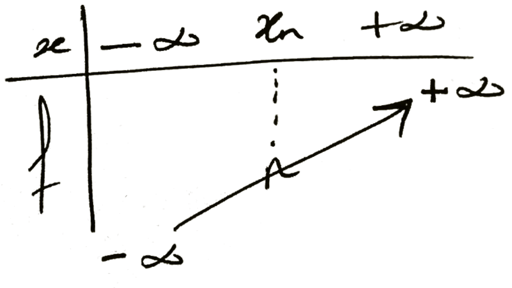
Donc $\ln\left(\frac{x_n}{y_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o(\ln y_n)$

Donc $\ln(x_n) = \ln(y_n) + \underset{n\to+\infty}{o}(\ln y_n)$

Conclusion : $\boxed{\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(y_n)}$

2.(a) On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x + e^x$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + e^x > 0$



f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
D'après le théorème de la bijection monotone, f est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, \exists! \, x_n \in \mathbb{R}, \; f(x_n) = n$.

$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \, (E_n) \text{ a donc unique solution réelle } x_n.}$

2.(b) On a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x_n) = n < n+1 = f(x_{n+1})$
Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; x_n < x_{n+1}.$$

Donc $\boxed{(x_n) \text{ est croissante}}$.

2.(c) Par l'absurde supposons que (x_n) converge vers un réel l.
Alors $x_n + e^{x_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l + e^l \in \mathbb{R}$.
C'est absurde car $x_n + e^{x_n} = n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

Donc (x_n) n'est pas convergente.
Comme elle est croissante, on sait d'après le théorème de la limite monotone que $\boxed{x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty}$

On a $\dfrac{x}{e^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées.

Comme $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ on a donc $\dfrac{x_n}{e^{x_n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(e^{x_n}\right)}$

<u>2.(d)</u> On a $\forall n\in\mathbb{N}$, $e^{x_n}+x_n=n$

donc $1+\dfrac{x_n}{e^{x_n}} = \dfrac{n}{e^{x_n}}$

Donc $\dfrac{n}{e^{x_n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1+0=1$

Donc $\boxed{e^{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n}$

Comme $n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ on a d'après 1. : $\ln\left(e^{x_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$

Donc $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)}$

<u>2.(e).i.</u> Pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$e^{y_n} = e^{x_n-\ln n} = \dfrac{e^{x_n}}{n} = 1-\dfrac{x_n}{n}$ d'après (E_n)

mais $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$ donc $x_n = \ln(n) + \underset{n\to+\infty}{o}(\ln n)$

donc $e^{y_n} = 1-\dfrac{\ln n}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$

2.(e).ii On a donc $e^{y_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

donc $y_n = \ln(e^{y_n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(1) = 0$

Comme $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ on a $e^{y_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} y_n$

2.(e).iii $e^{y_n} - 1 = -\dfrac{\ln n}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$

donc $e^{y_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\ln(n)}{n}$

Par transitivité : $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\ln(n)}{n}$

donc $y_n = -\dfrac{\ln(n)}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$

donc $\boxed{x_n = \ln(n) - \dfrac{\ln(n)}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)}$

Exercice 3

1.(a) $AB_1A \underset{(ii)}{=} A$ donc $AB_1AB_2 = AB_2$

Mais A commute avec B_1 et B_2 donc :

$$\underbrace{AB_1}\underbrace{AB_2} \overset{(i)}{=} B_1A \times B_2A = B_1AB_2A$$

or $AB_2A \overset{(ii)}{=} A$

donc $AB_1AB_2 = B_1A = AB_1$

On a donc $\boxed{AB_1 = AB_2}$

1.(b) On a donc $B_1AB_1 = B_1AB_2$

ie $B_1 \underset{(iii)}{=} B_1AB_2$

Mais $AB_1 = AB_2$ donne aussi $B_1A \overset{(i)}{=} B_2A$

donc $B_1AB_2 = B_2AB_2 \underset{(iii)}{=} B_2$

Ainsi $\boxed{B_1 = B_2}$

2.(a) On pose $A = B = O_n$.

Il est clair que (i), (ii) et (iii) sont vérifiés.

Donc <u>O_n est pseudo-inversible</u> et $\boxed{O_n^* = O_n}$

2.(b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible.

On a $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Donc $AA^{-1} = A^{-1}A$

$AA^{-1}A = A$

$A^{-1}AA^{-1} = A^{-1}$

Ainsi A est pseudo-inversible et $\boxed{A^* = A^{-1}}$

La réciproque est fausse : O_n est pseudo-inversible mais n'est pas inversible.

2.(c) Soit $A = \mathrm{Diag}(d_1, \dots, d_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale.

On a adopte la convention que $\frac{1}{x} = 0$ pour $x = 0$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \times \frac{1}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$x \times \frac{1}{x} \times x = x$ (même si $x = 0$)

$\frac{1}{x} \times x \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ (même si $x = 0$)

On pose alors $B = \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{d_1}, \dots, \frac{1}{d_n}\right)$

On a $AB = BA$ car deux matrices diagonales commutent.

$ABA = \mathrm{Diag}\left(d_1 \times \frac{1}{d_1} \times d_1, \dots, d_n \times \frac{1}{d_n} \times d_n\right) = \mathrm{Diag}(d_1, \dots, d_n) = A$

$BAB = \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{d_1} \times d_1 \times \frac{1}{d_1}, \dots, \frac{1}{d_n} \times d_n \times \frac{1}{d_n}\right) = \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{d_1}, \dots, \frac{1}{d_n}\right) = B$

Donc A est pseudo-inversible et $A^* = \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{d_1}, \dots, \frac{1}{d_n}\right)$

avec la convention $\frac{1}{x} = 0$ si $x = 0$

3.(a) On a $\begin{cases} AA^* = A^*A \\ AA^*A = A \\ A^*AA^* = A^* \end{cases}$ donc $\begin{cases} A^*A = AA^* \\ A^*AA^* = A^* \\ AA^*A = A \end{cases}$

Ainsi A^* est pseudo-inversible et $\boxed{(A^*)^* = A}$

3.(b) De même $\begin{cases} AA^* = A^*A \\ AA^*A = A \\ A^*AA^* = A^* \end{cases}$ donne en transposant : $\begin{cases} {}^t(A^*)\,{}^tA = {}^tA\,{}^t(A^*) \\ {}^tA \times {}^t(A^*) \times {}^tA = {}^tA \\ {}^t(A^*) \times {}^tA \times {}^t(A^*) = {}^t(A \end{cases}$

donc ${}^tA$ est pseudo-inversible et $\boxed{({}^tA)^* = {}^t(A^*)}$.

3.(c) On a $AA^* = A^*A$ donc $P^{-1}AA^*P = P^{-1} \times A^*AP$

donc $(P^{-1}AP)(P^{-1}A^*P) = (P^{-1}A^*P)(P^{-1}AP)$

Ensuite $(P^{-1}AP)(P^{-1}A^*P)(P^{-1}AP) = P^{-1}(AA^*A)P = P^{-1}AP$

Et $(P^{-1}A^*P)(P^{-1}AP)(P^{-1}A^*P) = P^{-1}(A^*AA^*)P = P^{-1}A^*P$

Donc $P^{-1}AP$ est pseudo-inversible et $\boxed{(P^{-1}AP)^* = P^{-1}A^*P}$

3. (d) Pour $k \geq 2$, on note H_k le prédicat "$A^* \times A^k = A^{k-1}$".

Pour $k = 2$: $A^*A^2 = (A^*A)A \underset{(i)}{=} AA^*A \underset{(ii)}{=} A = A^{2-1}$

donc H_2 est vrai.

Soit $k \geq 2$ pour lequel H_k est vrai.

On a donc $A^*A^k = A^{k-1}$

donc $A^*A^{k+1} = (A^*A^k)A = A^{k-1}A = A^k = A^{(k+1)-1}$

Donc H_{k+1} est vrai.

Par récurrence : $\boxed{\forall k \geq 2,\ A^*A^k = A^{k-1}}$

4. (a) p_0 vérifie la propriété donc $N^{p_0} = 0_n$

C'est le plus entier qui la vérifie donc $p_0 - 1$ ne la vérifie pas : $N^{p_0-1} \neq 0_n$

4. (b) Si $p_0 = 1$: $N = 0_n$.

Si $p_0 \geq 2$: $N^{p_0} = 0_n$ donc $N^* N^{p_0} = N^* \times 0_n = 0_n$

Comme $p_0 \geq 2$ on peut utiliser 3. (d) : $N^{p_0-1} = 0_n$

Impossible.

Donc seul le cas $p_0 = 1$ est possible et $\boxed{N = 0_n}$

4.(c) Si $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ alors $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$

Donc N est nilpotente.

De plus $N \neq O_2$ donc par contraposée de 4.(b),

N n'est pas pseudo_inversible.

5.(a) $A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$ $\quad C_1 = -C_2$

donc $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A - 2I_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ $\quad C_2 = -C_3$

donc $(A - 2I_3) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A - 4I_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$ $\quad C_1 = -C_3$

donc $(A - 4I_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

5.(b) Si $\lambda \in \{0; 2; 4\}$ le système linéaire $(A - \lambda I_3)X = O_{3,1}$ a une solution non nulle, donc la matrice $A - \lambda I_3$ est non inversible. Par contraposée :

$A - \lambda I_3$ inversible $\Longrightarrow \lambda \notin \{0; 2; 4\}$

Réciproquement on suppose que $\lambda \notin \{0;2;4\}$.

Soit $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $(A-\lambda . I_3)X = O_{3,1}$

On a donc $\begin{cases} (2-\lambda)x - 2y + 2z = 0 \\ -x + (1-\lambda)y + z = 0 \\ x - y + (3-\lambda)z = 0 \end{cases}$

$$\underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\iff} \begin{cases} \boxed{x} - y + (3-\lambda)z = 0 \\ -x + (1-\lambda)y + z = 0 \\ (2-\lambda)x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (2-\lambda)L_1}}{\iff} \begin{cases} \boxed{x} - y + (3-\lambda)z = 0 \\ \boxed{-\lambda y} + (4-\lambda)z = 0 \\ -\lambda y + (4-\lambda)(\lambda-1)z = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} \boxed{x} - y + (3-\lambda)z = 0 \\ \boxed{-\lambda y} + (4-\lambda)z = 0 \\ \boxed{(\lambda-2)(4-\lambda)z} = 0 \end{cases}$$

$\iff x = y = z = 0$ puisque $-\lambda \neq 0$ et $(\lambda-2)(4-\lambda) \neq 0$

Ceci prouve que $A-\lambda I_3$ est inversible.

Donc $\lambda \notin \{0;2;4\} \Longrightarrow A-\lambda I_3$ inversible.

Conclusion : $\boxed{\lambda \notin \{0;2;4\} \iff A-\lambda I_3 \text{ inversible}}$

5.(c) On considère le système linéaire :

$$\begin{cases} \boxed{x_1} + \quad x_3 = y_1 \\ x_1 + x_2 \quad = y_2 \\ \quad x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{x_1} \quad + x_3 = y_1 \\ \boxed{x_2} - x_3 = y_2 - y_1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ x_2 + x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{x_1} \quad + x_3 = y_1 \\ \boxed{x_2} - x_3 = -y_1 + y_2 \\ \boxed{2x_3} = y_1 - y_2 + y_3 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

Le système a unique solution donc P est inversible

On trouve ensuite $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 - y_3) \\ x_2 = \frac{1}{2}(-y_1 + y_2 + y_3) \\ x_3 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2 + y_3) \end{cases}$

donc $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$

On trouve $\boxed{P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$

5.(d) $P^{-1}AP$ est diagonale donc pseudo-inversible

et $(P^{-1}AP)^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ d'après 2.(c)

or $A = P(P^{-1}AP)P^{-1}$ donc d'après 3.(c), A est pseudo-inversible

et $A^* = P(P^{-1}AP)^* P^{-1} = \boxed{\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}$