Correction DS7

EXERCICE 2

1. La fonction constante nulle est polynomiale, donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Ainsi $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f,g) \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})^2$.

f et g sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $\lambda.f+g$ l'est aussi. Donc $\lambda.f+g \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Ceci prouve que $\boxed{C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ est un sev de } \mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$

2. (a) On a : $\forall t \in \mathbb{R},\ a.f_1(t) + b.f_2(t) + c.f_3(t) = 0$

Donc : $\forall t \in \mathbb{R},\ ae^t + be^{-t/2}.\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + c.e^{-t/2}.\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) = 0$

Pour $t=0$: $a + c = 0$

Pour $t = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$: $a.e^{\pi/\sqrt{3}} + b.e^{-\pi/(2\sqrt{3})} = 0$

Pour $t = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$: $a.e^{2\pi/\sqrt{3}} - c.e^{-\pi/\sqrt{3}} = 0$

Donc $\begin{cases} c = -a \\ b = -ae^{\sqrt{3}\pi/2} \\ a.\underbrace{\left(e^{2\pi/\sqrt{3}} + e^{-\pi/\sqrt{3}}\right)}_{\neq 0} = 0 \end{cases}$ donc $a=b=c=0$

Ceci prouve que $\boxed{\text{la famille } (f_1, f_2, f_3) \text{ est libre.}}$

2.(b) $f_1(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2)$

$$f_2(t) = \left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} + \underset{t\to 0}{o}(t^2)\right) \times \left(\frac{t\sqrt{3}}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2)\right)$$

$$= \frac{t\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}t^2 + \underset{t\to 0}{o}(t^2)$$

$$f_3(t) = \left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} + \underset{t\to 0}{o}(t^2)\right) \times \left(1 - \frac{3}{8}t^2 + \underset{t\to 0}{o}(t^2)\right)$$

$$= 1 - \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4} + \underset{t\to 0}{o}(t^2)$$

Donc $a f_1(t) + b . f_2(t) + c . f_3(t) = (a+c) + \left(a + \frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{c}{2}\right)t + \left(\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}b - \frac{c}{4}\right)t^2 + \underset{t\to 0}{o}(t^2)$

Mais comme $af_1 + bf_2 + cf_3$ est la fonction nulle :

$$a f_1(t) + b . f_2(t) + c f_3(t) = 0 = 0 + 0.t + 0.t^2 + \underset{t\to 0}{o}(t^2)$$

Donc par unicité de la partie régulière :

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a + \frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{c}{2} = 0 \\ \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}b - \frac{c}{4} = 0 \end{cases}$$

On obtient facilement $a = b = c = 0$.

Donc $\boxed{\text{la famille } (f_1, f_2, f_3) \text{ est libre}}$.

2.(c) Si $a \neq 0$:

$$af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} ae^t$$

C'est impossible car $\underbrace{af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t)}_{=0} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

Donc $a = 0$.

Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $be^{-t/2} \sin(t\sqrt{3}/2) + ce^{-t/2} . \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) = 0$

donc $b . \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + c\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) = 0$

En évaluant en $t = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ et $t = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ on obtient $b = c = 0$

Ainsi $\boxed{\text{la famille } (f_1, f_2, f_3) \text{ est libre}}$.

3. On a posé $\mathbb{F} = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$.

Par théorème on sait que $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{E}$.

Par définition la famille (f_1, f_2, f_3) est génératrice de $\mathbb{F}$.

Comme elle est libre : elle est une base de $\mathbb{F}$.

EXERCICE 3

1. l'expression $\frac{x}{\ln x}$ est définie pour $x > 0$ et $x \neq 1$.

Donc $D = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = [0,1[\cup]1,+\infty[$.

2. Pour $x > 0$: $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{\ln x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

3. f est de classe C^1 sur $]0,1[$ par quotients de fonctions C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas.

En 0 f est dérivable.

$\forall x \in]0,1[, \; f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2}$

donc $f'(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0 = f'(0)$

Donc f' est continue en 0.

Ainsi f est C^1 sur $[0,1[$.

4. Pour $x > 0$ et $x \neq 1$: $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

du signe de $\ln x - 1$.

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	0 $\searrow$		$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

$\dfrac{x}{\ln x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ par quotient de limites

$\dfrac{x}{\ln x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ par croissances comparées

5. On voit que l'intervalle $[e, +\infty[$ est f-stable.

Comme $v_0 = 3 \in [e, +\infty[$ on a par récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \in [e, +\infty[.$$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \geqslant e}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} - v_n = \dfrac{v_n}{\ln v_n} - v_n = \dfrac{v_n}{\ln v_n}\left(1 - \ln v_n\right) \leq 0$

car $v_n \geqslant e$

Donc (v_n) est décroissante.

Comme elle est minorée on sait d'après le théorème de la limite monotone qu'elle est convergente vers $l \geqslant e$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{\ln v_n}$

Si $n \to +\infty$: $\ell = \dfrac{\ell}{\ln \ell}$ $(\ln \ell \neq 0$ car $\ell \neq 1)$

Comme $\ell \geqslant e$: $\ln \ell = 1$ ie $\boxed{\ell = e}$

7. On a vu que :

$$\forall x \geqslant e, \quad f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} \geqslant 0$$

De plus $\dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} \leqslant \dfrac{1}{4} \iff 4 \ln x - 4 \leqslant (\ln x)^2$

$\iff (\ln x)^2 - 4 \ln x + 4 \geqslant 0$

$\iff (\ln x - 2)^2 \geqslant 0$ VRAI

Donc $\boxed{\forall x \geqslant e, \quad 0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}}$

8. On a donc $\forall x \geqslant e$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$.

Comme f est dérivable sur $[e, +\infty[$ on peut utiliser l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x, y) \in [e, +\infty[^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{4} |x - y|$$

En choisissant $x = v_n$ et $y = e$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_{n+1} - e| \leqslant \frac{1}{4} |v_n - e|$$

Par récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_n - e| \leq \frac{1}{4^n} |v_0 - e|$$

Mais $|v_0 - e| = 3 - e \leq 1$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}}$

9. def suite( ):

```
    n=0
    v=3
    while 1/4**n > 10**(-12):
        v=v/log(v)
        n=n+1
    return v
```

10. Pour $x \in D \setminus \{0\}$, $g'(x)$ est du signe de $h(x)$

h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x > 0, \quad h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{(x^2-1)^2}{x(x^2+1)^2} > 0 \text{ si } x \neq 1$$

Donc h est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

Comme $h(1) = 0$ on a $h(x) < 0$ si $x \in]0,1[$

$h(x) > 0$ si $x > 1$

On en déduit les variations de g

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	‖	$+$	
g	‖	↘	‖	↗	

11. $x^2-1=(x-1)(x+1) \underset{x\to 1}{\sim} 2(x-1)$

$$\ln x = \ln(1+x-1) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$$

Donc $g(x) \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{2(x-1)}{1\times(x-1)} = 2$

Donc $\boxed{g(x) \xrightarrow[x\to 1]{} 2}$

12. Pour $x\in D\setminus\{0\}$:

$f(x)-g(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ du signe de $\ln x$

Donc sur $]0,1[$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$

et sur $]1,+\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$.

13. Le plus grand intervalle sur lequel f est continue et contenant 0 est $[0,1[$.

Alors d'après le théorème fondamental de l'analyse :

$$x \overset{\varphi}{\longmapsto} \int_0^x f(t)\,dt \text{ est définie et dérivable sur } [0,1[$$

$$\text{et } \forall x \in [0,1[,\ \varphi'(x) = f(x)$$

Donc $\boxed{H \text{ est définie sur }]0,1[}$

14. On remarque que pour $x \in]0,1[$:

$$H(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0}$$

Comme φ est dérivable en 0 :

$$H(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \varphi'(0) = f(0)$$

$$\text{ie } \boxed{H(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0}$$

15. On a vu que $\ln x \underset{x \to 1}{\sim} x - 1$

donc que $\dfrac{\ln x}{x-1} \xrightarrow[x \to 1^-]{} 1$

Donc $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in]0,1[,\ \forall x \in [a,1[,\ \left| \dfrac{\ln x}{x-1} - 1 \right| \leqslant \varepsilon$

Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$:

$$\exists a \in]0,1[,\ \forall x \in [a,1[,\ \left|\frac{\ln x}{x-1} - 1\right| \leqslant \frac{1}{2}$$

Et donc $\forall x \in [a,1[,\ \frac{1}{2} \leqslant \frac{\ln x}{x-1} \leqslant \frac{3}{2}$

Donc $\boxed{\forall x \in [a,1[,\ \frac{3}{2}(x-1) \leqslant \ln x \leq \frac{1}{2}(x-1)}$ puisque $x-1<0$

Pour $x \in]0,1[$, $H(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$

Donc pour $x \in [a,1[$, $H(x) = \frac{1}{x}\int_0^a f(t)\,dt + \frac{1}{x}\int_a^x \frac{t}{\ln t}\,dt$

$\frac{1}{x}\int_0^a f(t)\,dt \xrightarrow[x \to 1^-]{} \int_0^a f(t)\,dt$ puisque cette quantité ne dépend pas de x

et si $t \in [a,x]$ alors $t \in [a,1[$ donc :

$$\frac{3}{2}(t-1) \leq \ln t \leqslant \frac{1}{2}(t-1) < 0$$

donc $\frac{2}{t-1} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{2}{3(t-1)}$

donc $\frac{2t}{t-1} \leqslant f(t) \leqslant \frac{2t}{3(t-1)}$

donc $2.\int_a^x \frac{t}{t-1}\,dt \leqslant \int_a^x f(t)\,dt \leqslant \frac{2}{3}\int_a^x \frac{t}{t-1}\,dt$

Mais $\int_a^x \frac{t}{t-1}\,dt = \int_a^x \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)dt = x - a + \ln\left(\frac{x-1}{a-1}\right)$

donc $2\left(1-\frac{a}{x}\right)+\frac{2}{x}\cdot\ln\left(\frac{x-1}{a-1}\right) \leqslant \frac{1}{x}\int_a^x f(t)\,dt \leqslant \frac{2}{3}\left(1-\frac{a}{x}\right)+\frac{2}{3x}\ln\left(\frac{x-1}{a-1}\right)$

Par le th de majoration :

$$\frac{1}{x}\int_a^x f(t)\,dt \xrightarrow[x\to 1^-]{} -\infty$$

Par somme de limites : $\boxed{H(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} -\infty}$

EXERCICE 4

1. A est définie et dérivable sur I comme somme de fonctions qui le sont.

$$\forall x \in I, \quad A'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} = \frac{2-x}{(1-x)^2}$$

2. $(E) \iff y' - \frac{2-x}{(1-x)^2} y = 0$

c'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène.

Les solutions sont toutes les fonctions :

$$x \longmapsto C e^{A(x)} \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

donc $\boxed{x \longmapsto \frac{C}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}} \quad \text{où } C \in \mathbb{R}}$

3. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \underset{x \to 0}{o}(x^3)$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \underset{x \to 0}{o}(x^3)$$

donc $e^{\frac{1}{1-x}} = e^{1+x+x^2+x^3+\underset{x\to 0}{o}(x^3)}$

$$= e \times \left((x+x^2+x^3) + \frac{1}{2}(x+x^2+x^3)^2 + \frac{1}{6}(x+x^2+x^3)^3 + \underset{x \to 0}{o}(x^3) \right)$$

$$= e \times \left(x + x^2 + x^3 + \frac{x^2}{2} + x^3 + \frac{x^3}{6} + \underset{x \to 0}{o}(x^3) \right)$$

$$= e \times \left(x + \frac{3x^2}{2} + \frac{13x^3}{6} \right) + \underset{x \to 0}{o}(x^3)$$

Donc par produit on trouve :

$$\boxed{f(x) = e\,x\left(1 + 2x + \frac{7x^2}{2} + \frac{17x^3}{3}\right) + \underset{x\to 0}{o}(x^3)}$$

4. On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ par
$P_0 = X$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $P_{n+1} = X^2 \cdot (P_n' + P_n)$.

Montrons que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x<1$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) \cdot e^{\frac{1}{1-x}}$

C'est vrai pour $n=0$.

Supposons que ce soit vrai pour un $n\in\mathbb{N}$ fixé.

On a $\forall x<1$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) \cdot e^{\frac{1}{1-x}}$

On dérive :

$$\forall x<1,\ f^{(n+1)}(x) = \left[\frac{1}{(1-x)^2} \cdot P_n'\left(\frac{1}{1-x}\right) + \frac{1}{(1-x)^2} P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\right] e^{\frac{1}{1-x}}$$

$$= P_{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right) \cdot e^{\frac{1}{1-x}}$$

Donc le prédicat est vrai pour l'entier $n+1$.

Il est donc vrai pour tout $n\in\mathbb{N}$.

5. On trouve :

$$\underline{P_0 = X}\ ,\quad \underline{P_1 = X^3 + X^2}\ ,\quad \underline{P_2 = X^5 + 4X^4 + 2X^3}$$

$$\text{et } \underline{P_3 = X^7 + 9X^6 + 18X^5 + 6X^4}$$

6. D'après la formule de Leibnitz :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x < 1,\ \left((1-x)^2 f'(x)\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left((1-x)^2\right)^{(k)} f^{(n-k+1)}(x)$$

$$= (1-x)^2 . f^{(n+1)}(x) - 2n(1-x) f^{(n)}(x) + n(n-1) . f^{(n-1)}(x)$$

$$\text{et } \left((2-x) . f(x)\right)^{(n)} = (2-x) . f^{(n)}(x) - n . f^{(n-1)}(x)$$

Comment les deux quantités sont égales on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x < 1$:

$$(1-x)^2 . f^{(n+1)}(x) = \left(-(2n+1)x + 2n + 2\right) . f^{(n)}(x) - n^2 . f^{(n-1)}(x)$$

Après division des deux membres par $(1-x)^2$ puis simplification par $e^{1/(1-x)}$:

$$P_{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{-(2n+1)x + 2n+2}{(1-x)^2} . P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) - \frac{n^2}{(1-x)^2} . P_{n-1}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

On pose $y = \frac{1}{1-x}$:

$$P_{n+1}(y) = \left((2n+1)y + y^2\right) . P_n(y) - n^2 y^2 . P_{n-1}(y)$$

et y décrit $]0, +\infty[$ lorsque x décrit $]-\infty, 1[$.

Les deux polynômes ci-dessus coïncident en une infinité de valeurs : ils sont donc égaux.

Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ P_{n+1}(X) = \left((2n+1)X + X^2\right) P_n(X) - n^2 X^2 . P_{n-1}(X)}$$

7. D'après 4. on a $a_n = e \times P_n(1)$

D'après 6. on a : $P_{n+1}(1) = (2n+2) . P_n(1) - n^2 . P_{n-1}(1)$

Donc $\boxed{a_{n+1} = (2n+2) . a_n - n^2 . a_{n-1}}$

8.(a) Comme f est C^3 au voisinage de 0 on sait que

$$f(x) = f(0) + f'(0) . x + \frac{f''(0)}{2} x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6} x^3 + \underset{x \to 0}{o}(x^3)$$

Par unicité de la partie régulière on a d'après 3. :

$\underline{a_0 = e}$ $\underline{a_1 = 2e}$ $\underline{a_2 = 7e}$ $\underline{a_3 = 34e}$

Alors $a_4 = 8a_3 - 9a_2 = \underline{209e}$

8.(b) Comme f C^4 au voisinage de 0 on a donc d'après la formule de Taylor-Young :

$$f(x) = e \times \left(1 + 2x + \frac{7x^2}{2} + \frac{17x^3}{3} + \frac{209}{24}x^4\right) + \underset{x \to 0}{o}(x^4)$$

9. f_p est dérivable sur $[0,1]$ et

$$\forall x \in [0,1],\quad f_p'(x) = \left(1 + x + \dots + \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \dots - \frac{x^p}{p!}\right)e^{-x}$$

$$= -\frac{x^p}{p!}e^{-x}$$

$$\text{donc } |f_p'(x)| = \frac{x^p}{p!}e^{-x} \leq \frac{1}{p!}$$

D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2,\quad |f_p(x) - f_p(y)| \leq \frac{1}{p!}|x-y|$$

Pour $x = 0$ et $y = 1$:

$$\left|1 - \frac{1}{e}u_p\right| \leq \frac{1}{p!}$$

Donc par majoration de l'erreur : $\frac{1}{e}u_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} 1$

donc $\boxed{u_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} e}$

10.(a) $S_p(0) = \sum_{i=0}^{p} \frac{i!}{(i!)^2} = \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!} = \boxed{u_p}$

$$S_p(1) = \sum_{i=0}^{p} \frac{(i+1)!}{(i!)^2} = \sum_{i=0}^{p} \frac{(i+1)\times i!}{(i!)^2} = \sum_{i=0}^{p} \frac{i+1}{(i!)^2}$$

$$= \sum_{i=0}^{p} \frac{i}{i!} + \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!} = \frac{0}{0!} + \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{(i-1)!} + \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!}$$

$$\boxed{S_p(1) = u_{p-1} + u_p}$$

10.(b) Donc $\boxed{S_p(0) \xrightarrow[p\to+\infty]{} e}$ et $\boxed{S_p(1) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 2e}$

11. $S_p(n+1) - (2n+2).S_p(n) + n^2.S_p(n-1) + S_p(n)$

$$= \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i+1)! - (2n+2).(n+i)! + n^2.(n+i-1)! + (n+i)!}{(i!)^2}$$

$$= \sum_{i=0}^{p} \frac{\left[(n+i+1)(n+i) - 2(n+1)(n+i) + n^2 + n + i\right].(n+i-1)!}{(i!)^2}$$

$$= \sum_{i=0}^{p} \frac{(\cancel{n^2} + \cancel{2ni} + i^2 + \cancel{n} + \cancel{i} - \cancel{2n^2} - \cancel{2in} - \cancel{2n} - \cancel{2i} + \cancel{n^2} + \cancel{n} + \cancel{i})(n+i-1)!}{(i!)^2}$$

$$= \frac{0^2}{(0!)^2}.(n-1)! + \sum_{i=1}^{p} \frac{(n+i-1)!}{((i-1)!)^2} = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(n+i)!}{(i!)^2} = S_{p-1}(n)$$

Donc $\boxed{S_p(n+1) - (2n+2).S_p(n) + n^2.S_p(n-1) = S_{p-1}(n) - S_p(n)}$

12. On procède par récurrence sur n.

C'est vrai pour $n=0$

Supposons que $S_p(n) \xrightarrow[p \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$ pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$,

et $S_p(n-1) \xrightarrow[p \to +\infty]{} L \in \mathbb{R}$.

On a $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $S_p(n+1) = (2n+1) S_p(n) - n^2 S_p(n-1) + S_{p-1}(n)$

$$\xrightarrow[p \to +\infty]{} (2n+1) \cdot \ell - n^2 \cdot L + \ell \in \mathbb{R}$$

Donc la suite $(S_p(n+1))_{p \in \mathbb{N}}$ converge.

Par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(S_p(n))_{p \in \mathbb{N}}$ converge

---

13. Notons ℓ_n la limite de la suite $(S_p(n))_{p \in \mathbb{N}}$.

La question 11. donne lorsque $p \to +\infty$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ell_{n+1} - (2n+2)\ell_n + n^2 \ell_{n-1} = 0$$

Comme $\ell_0 = e = a_0$ et $\ell_1 = 2e = a_1$ on a par récurrence à 2 pas immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ell_n = a_n.$$

Ainsi $a_n = \lim_{p \to +\infty} S_p(n) = \boxed{\lim_{p \to +\infty} \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2}}$

et donc $\boxed{a_n = \lim_{p \to +\infty} \sum_{i=0}^{p} \binom{n+i}{n} \times \frac{1}{i!}}$