Correction du DS8

EXERCICE 2

Partie A

A.1. $g_a(t) = t^a = e^{a \cdot \ln t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (fonction usuelle)

$$g_a(t) \xrightarrow[t \to 0^+]{} \begin{cases} 1 & \text{si } a = 0 \\ 0 & \text{si } a > 0 \end{cases}$$

Si on pose $g_a(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 0 \\ 0 & \text{si } a > 0 \end{cases}$

alors on prolonge g_a par continuité en 0.

Si $a \geq 1$, g_a est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ (fonction usuelle) et :

$$\forall t > 0,\ g_a'(t) = a \cdot t^{a-1} \xrightarrow[t \to 0^+]{} \begin{cases} 1 & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

Comme g_a est continue sur $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}_+^* \cup \{0\}$ et C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut appliquer le théorème de prolongement du caractère C^1 :

$$\boxed{g_a \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^+}$$

A.2. $t \mapsto 1 - t$ est continue (car polynomiale) sur $[0,1]$ et à valeurs dans $[0,1]$. Donc $t \mapsto g_b(1-t)$ est continue sur $[0,1]$ comme composée de fonctions continues.

Donc $t \mapsto g_a(t) \times g_b(1-t)$ est continue sur $[0,1]$ car produit de fonctions qui le sont.

Donc $\boxed{\text{l'intégrale } I(a,b) \text{ existe}}$.

$$I(b,a) = \int_0^1 (1-t)^a \times t^b \, dt$$

on pose $t = 1 - s = \varphi(s)$

t	s
0	1
1	0

φ est C^1 sur $[0,1]$ et $dt = -ds$

Par changement de variable :

$$I(b,a) = \int_1^0 s^a (1-s)^b \times (-ds) = \int_0^1 s^a (1-s)^b \, ds$$

Donc $\boxed{I(b,a) = I(a,b)}$

<u>A.3.</u> $I(a+1,b) = \int_0^1 t^{a+1} \times (1-t)^b \, dt$

On pose $\begin{cases} u(t) = t^{a+1} \\ v'(t) = (1-t)^b \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(t) = (a+1) \times t^a \\ v(t) = -\frac{1}{b+1}(1-t)^{b+1} \end{cases}$

u et v sont de classe C^1 sur $[0,1]$ donc par intégration par parties :

$$I(a+1,b) = \left[-\frac{1}{b+1} t^{a+1} \cdot (1-t)^{b+1} \right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 -\frac{a+1}{b+1} t^a (1-t)^{b+1} \, dt$$

$$= 0 - 0 + \frac{a+1}{b+1} \cdot I(a,b+1)$$

Donc $\boxed{I(a+1,b) = \frac{a+1}{b+1} I(a,b+1)}$

A.4. Procédons par récurrence. $H_n =$ "$\forall a \geq 0, I(a,n) = \dfrac{n!}{(a+1)\dots(a+n+1)}$"

Le prédicat est vrai pour $n = 0$ car :

$$\forall a \geq 0, I(a,0) = \int_0^1 t^a \, dt = \left[\frac{t^{a+1}}{a+1}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{a+1}$$

et $\dfrac{0!}{a+1} = \dfrac{1}{a+1}$

Supposons le prédicat vrai pour entier $n \in \mathbb{N}$ fixé.

$$\forall a \geq 0, I(a, n+1) \underset{A.2.}{=} I(n+1, a) \underset{A.3.}{=} \frac{n+1}{a+1} \times I(n, a+1)$$

$$\underset{A.2.}{=} \frac{n+1}{a+1} \cdot I(a+1, n)$$

$$\underset{H_n}{=} \frac{n+1}{a+1} \times \frac{n!}{(a+2)(a+3)\dots(a+n+2)} = \frac{(n+1)!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n+2)}$$

Donc H_{n+1} est vrai.

Par récurrence : H_n vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

A.5. $I(p,q) \underset{A.4.}{=} \dfrac{q!}{(p+1)(p+2)\dots(p+q+1)} = \boxed{\dfrac{p! \times q!}{(p+q+1)!}}$

A.6. On pose $t = \sin^2(\theta) = \varphi(\theta)$

t	θ
0	0
1	$\pi/2$

φ est C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $dt = 2\sin\theta . \cos\theta \, d\theta$

Par changement de variable :

$$I(p,q) = \int_0^{\pi/2} \sin^{2p}(\theta) \times \big(\underbrace{1 - \sin^2(\theta)}_{\cos^2\theta}\big)^q \cdot 2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta$$

$$= 2 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin(\theta)^{2p+1} \cdot \cos(\theta)^{2q+1} d\theta = 2 \cdot J(p,q)$$

donc $\boxed{J(p,q) = \dfrac{p! \times q!}{2 \times (p+q+1)!}}$

Partie B

B.1. $f_a(x)$ existe ssi $1 - \frac{a}{x} > 0$ et $x \neq 0$

ssi $\frac{x-a}{x} > 0$ et $x \neq 0$

x	$-\infty$	0		a	$+\infty$
$x-a$	$-$		$-$		$+$
x	$-$		$+$		$+$
$\frac{x-a}{x}$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

Donc $\boxed{f_a \text{ est définie sur }]-\infty, 0[\cup]a, +\infty[}$

B.2. Comme $0 < a < x$ on a $0 < x-a < x$.

Donc $\ln$ est continue sur $[x-a, x]$ et dérivable sur $]x-a, x[$ ($\ln$ dérivable donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$). D'après le théorème des accroissements finis :

$$\exists c \in]x-a, x[, \quad \frac{1}{c} = \frac{\ln(x) - \ln(x-a)}{x-(x-a)} = \frac{\ln(x) - \ln(x-a)}{a}$$

Mais $0 < x-a < c < x$ donne $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{c} \leq \dfrac{1}{x-a}$

Comme $a > 0$: $\boxed{\dfrac{a}{x} \leq \ln(x) - \ln(x-a) \leq \dfrac{a}{x-a}}$

<u>B.3.</u> f_a est dérivable sur $]a, +\infty[$ comme composée et produit de fonctions dérivables.

$$\forall x > a, \quad f_a'(x) = \ln\left(1 - \frac{a}{x}\right) + x \frac{a}{x^2} \times \frac{1}{1 - \frac{a}{x}}$$

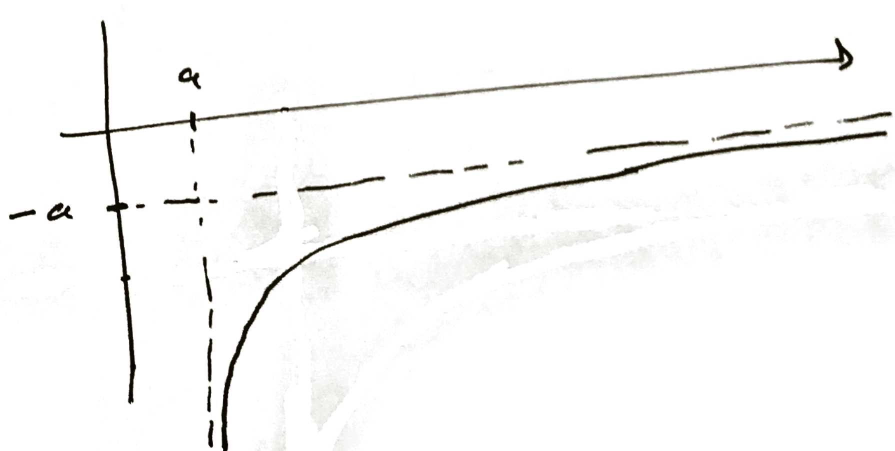
$$= \ln(x-a) - \ln x + \frac{a}{x-a} \underset{B.2.}{\geq} 0$$

x	a		$+\infty$
f_a	$-\infty$	$\nearrow$	$-a$

$$f_a(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x \times \frac{-a}{x}$$

$$f_a(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} -\infty$$

<u>B.4.</u>



B.5. On remarque que $y_n = \exp\left(n . \ln\left(1 - \frac{a}{n}\right)\right)$

$$= \exp\left(f_a(n)\right)$$

Si $a < n$ alors $n \leq n+1$

donc $f_a(n) \leq f_a(n+1)$ car $f_a \nearrow$

donc $y_n \leq y_{n+1}$ car $\exp \nearrow$

Donc $\boxed{(y_n) \text{ est croissante}}$

De plus $f_a(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} -a$ et $e^x \xrightarrow[x \to -a]{} e^{-a}$ par continuité

Donc $\boxed{y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-a}}$ par composition de limites.

Partie C

C.1. On pose $u = n \times t = \varphi(t)$

t	u
0	0
1	n

φ est de classe C^1 sur $[0,1]$

et $du = n . dt$

Par changement de variable :

$$F_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n n^x t^x . n . dt = n^{x+1} \int_0^1 (1-t)^n t^x dt$$

Donc $\boxed{F_n(x) = n^{x+1} \times I(x,n)}$

<u>C.2.</u> D'après B.5. on a

$\forall u \geq 0, \forall n \geq u, \quad \left(1-\frac{u}{n}\right)^n \leq \left(1-\frac{u}{n+1}\right)^{n+1}$

et c'est vrai si $u=0$ ou $u=n$.

Par croissance de l'intégrale :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \underbrace{\int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^n u^x \, du}_{= F_n(x)} \leq \underbrace{\int_0^n \left(1-\frac{u}{n+1}\right)^{n+1} \cdot u^x \, du}_{= F_{n+1}(x) - \int_n^{n+1} \left(1-\frac{u}{n+1}\right)^{n+1} \cdot u^x \, du}$$

Mais si $u \in [n, n+1]$: $\left(1-\frac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^x \geq 0$

donc $\displaystyle\int_n^{n+1} \left(1-\frac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^x \, du \geq 0$ par positivité de l'intégrale

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F_n(x) \leq F_{n+1}(x)$

Donc la suite $\boxed{(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est croissante}}$

<u>C.3.(a)</u> Par croissances comparées : $u^{x+2} \cdot e^{-u} \xrightarrow[u \to +\infty]{} 0$

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists U > 0 ; \forall u \geq U, \quad u^{x+2} e^{-u} \leq \varepsilon$

Pour $\varepsilon = 1$: $\boxed{\exists U > 0 ; \forall u \geq U, \quad e^{-u} \leq \frac{1}{u^{x+2}}}$

C.3.(b) $F_n(x) = \int_0^U \left(1-\frac{u}{n}\right)^n u^x \, du + \int_U^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^n u^x \, du$

- D'après B.5. $\left(1-\frac{u}{n}\right)^n \leqslant e^{-u}$ (même si $u=0$)

$$\text{donc } \int_0^U \left(1-\frac{u}{n}\right)^n u^x \, dx \leqslant \int_0^u e^{-u} . u^x \, du$$

- Pour $u \in [U, n]$: $\left(1-\frac{u}{n}\right)^n . u^x \leqslant e^{-u} . u^x \leqslant \frac{1}{u^2}$

$$\text{donc } \int_U^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^n . u^x \, du \leqslant \int_U^n \frac{du}{u^2} = \left[-\frac{1}{u}\right]_U^n = \frac{1}{U} - \frac{1}{n}$$

$$\leqslant \frac{1}{U}$$

Ainsi $\boxed{F_n(x) \leqslant \int_0^U e^{-u} . u^x \, du + \frac{1}{U}}$

C.3.(c) Comme le membre de droite ne dépend pas de n, on obtient que la suite $(F_n(x))_{n \geqslant 1}$ est majorée.
Comme elle est aussi croissante, on sait d'après le théorème de la limite monotone qu'elle est convergente.

C.4. $F_n(x+1) = \int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^n . u^{x+1} \, du \underset{C.1}{=} n^{x+2} . I(x+1, n)$

Mais $I(x+1,n) \underset{A.4.}{=} \dfrac{n!}{(x+2)(x+3)\dots(x+n+2)}$

$$\underset{A.3.}{=} I(x,n+1) \times \frac{x+1}{n+1}$$

Donc $F_n(x+1) = (n+1)^{x+1} \cdot I(x,n+1) \cdot (x+1) \cdot \dfrac{n^{x+2}}{(n+1)^{x+2}}$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{x+2} \cdot (x+1) \cdot F_n(x)$$

Si $n \to +\infty$: $\boxed{F(x+1) = (x+1) \cdot F(x)}$

$$F(0) = \lim_{n\to+\infty} F_n(0) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^n du$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left[-\frac{n}{n+1}\left(1-\frac{u}{n}\right)^{n+1}\right]_{u=0}^{u=n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

De plus $\forall k \in \mathbb{N}$, $F(k+1) = (k+1) \cdot F(k)$.

Par récurrence immédiate : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ F(k) = k!}$

EXERCICE 3

Partie A

1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P,Q) \in \mathbb{R}_1[X]^2$:

$$\varphi_1(\lambda P+Q) = (X-a).(X-b).(\lambda P'+Q') - \left(X-\frac{a+b}{2}\right).(\lambda P+Q)$$

$$= \lambda.\left((X-a)(X-b)P' - \left(X-\frac{a+b}{2}\right)P\right) + (X-a)(X-b)Q' - \left(X-\frac{a+b}{2}\right)Q$$

$$= \lambda.\varphi_1(P) + \varphi_1(Q)$$

De plus si $P \in \mathbb{R}_1[X]$ alors $\varphi_1(P) \in \mathbb{R}[X]$

et si $P = \lambda X + \mu$ alors :

$$\varphi_1(P) = \cancel{\lambda X^2} - \cancel{\lambda X^2} + \text{termes de deg} \leq 1$$

donc $\varphi_1(P) \in \mathbb{R}_1[X]$.

Ainsi φ_1 est un endomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$

2. Si $P \in \mathrm{Ker}(\varphi_1)$ alors $\left(X - \frac{a+b}{2}\right)P = (X-a)(X-b)P'$

Si $a \neq b$:

$$\frac{b-a}{2}.P(a) = 0$$

$$\frac{b-a}{2}.P(b) = 0$$

donc a et b sont racines de P.

Comme $\deg P \leq 1$: $P = 0$

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi_1) = \{0\}}$

Si $a=b$: $(X-a)P = (X-a)^2 P'$

donne $P = (X-a)P' \in \mathrm{Vect}(X-a)$

car $P' \in \mathbb{R}_0[X]$

La réciproque est immédiate. Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi_1) = \mathrm{Vect}(X-a)}$

3. Si $a \neq b$: $\mathrm{Ker}(\varphi_1) = \{0\}$ donc φ_1 est injectif.

Comme φ_1 est un endomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$ et comme $\mathbb{R}_1[X]$ est un $\mathbb{R}$ev de dimension finie, on sait que φ_1 est bijectif.

Si $a=b$: $\mathrm{Ker}(\varphi_1) \neq \{0\}$ donc φ_1 n'est pas injectif donc φ_1 n'est pas bijectif.

Ainsi : $\boxed{\varphi_1 \text{ est bijectif} \iff a \neq b}$

4.(a) Les polynômes $X-a$ et $X-b$ sont non colinéaires donc forment une famille libre de $\mathbb{R}_1[X]$. Comme $\dim(\mathbb{R}_1[X]) = 2$ ils forment en fait une base de $\mathbb{R}_1[X]$.

4.(b) $\varphi_1(X-a) = (X-a)(X-b) - \left(X - \frac{a+b}{2}\right)(X-a)$

$= \boxed{\frac{a-b}{2} \cdot (X-a)}$

et de même $\varphi_1(X-b) = \boxed{\frac{b-a}{2} \cdot (X-b)}$

Par récurrence immédiate :

$$\boxed{\begin{aligned} \forall q \in \mathbb{N},\quad & \varphi_1^q(X-a) = \left(\frac{a-b}{2}\right)^q (X-a) \\ & \varphi_1^q(X-b) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^q (X-b) \end{aligned}}$$

4.(c) On cherche $(\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P = \gamma\cdot(X-a) + \delta(X-b)$

Par unicité des coefficients :

$$\begin{cases} \lambda = \gamma + \delta \\ \mu = -a\gamma - b\delta \end{cases}$$

$bL_1 + L_2$ donne $b\lambda + \mu = (b-a)\gamma$ donc $\gamma = \dfrac{\lambda b + \mu}{b-a}$

$aL_1 + L_2$ donne $a\lambda + \mu = (a-b)\delta$ donc $\delta = \dfrac{\lambda a + \mu}{a-b}$

Alors par linéarité de φ_1 :

$$\forall q \in \mathbb{N},\quad \varphi_1^q(\lambda X + \mu) = \gamma\cdot\varphi_1^q(X-a) + \delta\cdot\varphi_1^q(X-b)$$

$$= \gamma\cdot\left(\frac{a-b}{2}\right)^q (X-a) + \delta\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^q (X-b)$$

$$\boxed{\varphi_1^q(\lambda X + \mu) = -\frac{\lambda b + \mu}{2^q}(a-b)^{q-1}\cdot(X-a) - \frac{\lambda a + \mu}{2^q}(b-a)^{q-1}\cdot(X-b)}$$

5.(a) On voit que $\Gamma = \mathrm{Vect}(id, \varphi_1, \varphi_1^2, \varphi_1^3, \varphi_1^4)$

Donc Γ est un sev de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_1[X])$.

5.(b) On trouve : $\varphi_1(1) = -X + \frac{a+b}{2}$

$$\varphi_1(X) = ab - \frac{a+b}{2}X$$

Puis : $\varphi_1^2(1) = -\varphi_1(X) + \frac{a+b}{2}.\varphi_1(1) = \frac{(a-b)^2}{4}$

$$\varphi_1^2(X) = ab.\varphi_1(1) - \frac{a+b}{2}.\varphi_1(X) = \frac{(a-b)^2}{4}X$$

Comme φ_1^2 et $\frac{(a-b)^2}{4}id$ coïncident sur une base (ici $(1,X)$)

alors elles sont égales : $\boxed{\varphi_1^2 = \frac{(a-b)^2}{4}.id}$

Donc $\varphi_1^3 = \frac{(a-b)^2}{4}\varphi_1$.

Ainsi φ_1^2 et φ_1^3 sont combinaisons linéaires de (id, φ_1)

5.(c) On a donc $\Gamma = \mathrm{Vect}(id, \varphi_1)$

Comme 1 et $\varphi_1(1)$ sont non colinéaires, id et φ_1 ne le sont pas non plus.

Donc $\boxed{(id, \varphi_1) \text{ est une base de } \Gamma}$

6. Si $a=4$ et $b=2$ alors $\frac{(a-b)^2}{4}=1$ donc $\varphi_1^2=id$

donc φ_1 est une symétrie.

Pour $P\in\mathbb{R}_1[X]$:

$$
\begin{aligned}
P\in \mathrm{Ker}(\varphi_1-id) &\iff \varphi_1(P)=P\\
&\iff (X-4)(X-2)P'-(X-3)P=P\\
&\iff (X-4)(X-2)P'=(X-2)P\\
&\iff (X-4)P'=P\\
&\underset{P' \text{ constant}}{\iff} P\in \mathrm{Vect}(X-4)
\end{aligned}
$$

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi_1-id)=\mathrm{Vect}(X-4)}$

De même :

$$
\begin{aligned}
P\in \mathrm{Ker}(\varphi_1+id) &\iff \varphi_1(P)=-P\\
&\iff (X-4)(X-2)P'=(X-4)P\\
&\iff (X-2)P'=P\\
&\underset{P' \text{ constant}}{\iff} P\in \mathrm{Vect}(X-2)
\end{aligned}
$$

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi_1+id)=\mathrm{Vect}(X-2)}$

Partie B

7. On montre que φ_n est linéaire comme en A.1.

Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$: $P = a_n X^n +$ termes de $\deg \leq n-1$ avec $a_n \in \mathbb{R}$

alors $\varphi_n(P) = (X-a)(X-b)n a_n X^{n-1} - n\left(X - \frac{a+b}{2}\right)a_n X^n$

+ termes de $\deg \leq n$

$= \cancel{n a_n X^{n+1}} - \cancel{n a_n X^{n+1}} +$ termes de $\deg \leq n$

donc $\varphi_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Ainsi : φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

8.(a) $\dfrac{2x-(a+b)}{x^2-(a+b)x+ab} = \dfrac{2x-(a+b)}{(x-a)(x-b)}$

donc $x \longmapsto \dfrac{2x-(a+b)}{x^2-(a+b)x+ab}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{a,b\}$

donc sur I

8.(b) $\forall x \in I$, $\dfrac{2x-(a+b)}{(x-a)(x-b)} = \dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b}$

Donc on choisit $\boxed{\forall x \in I, \quad F(x) = \ln(x-a) + \ln(x-b)}$

8.(c) Les solutions sont les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto C e^{\frac{n}{2}(\ln(x-a)+\ln(x-b))} = C.(x-a)^{\frac{n}{2}}(x-b)^{\frac{n}{2}}$$

où $C \in \mathbb{R}$

8.(d) Soit $P \in \mathrm{Ker}(\varphi_n)$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x-a)(x-b)P'(x) - n\left(x - \frac{a+b}{2}\right)P(x) = 0$

En particulier P est solution de (E) sur I.

Donc $\exists C \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I$, $P(x) = C.(x-a)^p.(x-b)^p$

Comme le polynôme $P - C.(X-a)^p(X-b)^p$ a une infinité de racines : il est nul.

Donc $P \in \mathrm{Vect}\left((X-a)^p(X-b)^p\right)$

La réciproque est immédiate.

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi_n) = \mathrm{Vect}\left((X-a)^{\frac{n}{2}}(X-b)^{\frac{n}{2}}\right) \text{ si } n \text{ pair}}$

8.(e) Soit $P \in \mathrm{Ker}(\varphi_n)$.

De même $\exists C \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I$, $P(x) = C(x-a)^p(x-b)^p\sqrt{(x-a)(x-b)}$

Si $a = b$: On trouve $P = C(X-a)^{2p+1}$ donc $P \in \mathrm{Vect}((X-a)^n)$

La réciproque est immédiate.

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi_n) = \mathrm{Vect}\left((X-a)^n\right) \text{ si } a=b \text{ et } n \text{ impair}}$

Si $a \neq b$: Comme P doit être un polynôme alors $C=0$

donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi_n) = \{0_{\mathbb{R}[X]}\} \text{ si } a \neq b \text{ et } n \text{ impair}}$