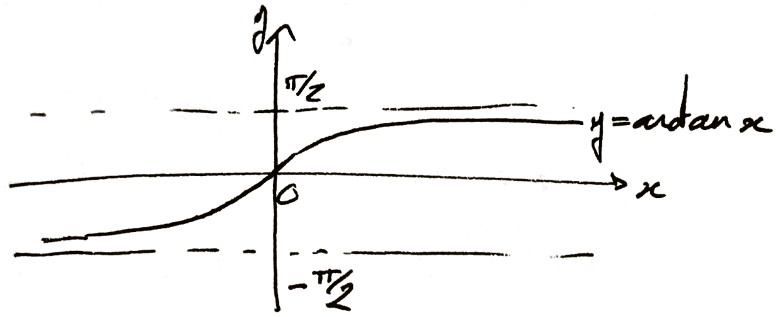
Correction du DS8 EXERCICE 1 Partie I

1.



Pour $u>0$ on pose $\varphi(u)=\arctan\left(\frac{1}{u}\right)$

φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ (composée de fonctions dérivables) et

$\forall u>0,\ \varphi'(u)=-\frac{1}{u^2}\times\frac{1}{1+\frac{1}{u^2}}=-\frac{1}{1+u^2}=-(\arctan)'(u)$

La fonction $\varphi+\arctan$ est donc constante sur $]0,+\infty[$.

$$\varphi(u)+\arctan(u)\xrightarrow[u\to+\infty]{}0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

Donc $\forall u>0,\ \varphi(u)+\arctan(u)=\frac{\pi}{2}$

Donc $\boxed{\forall u>0,\ \arctan\left(\frac{1}{u}\right)=\frac{\pi}{2}-\arctan(u)}$

2. arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall u\in\mathbb{R},\ |\arctan'(u)|=\frac{1}{1+u^2}\leqslant 1$

donc d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\boxed{\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |\arctan x-\arctan y|\leq|x-y|}$$

3. Si f est C^2 sur $\mathbb{R}$ la formule de Taylor avec reste intégral donne pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$:

$$f(b)=f(a)+f'(a)\times(b-a)+\int_a^b\frac{(b-t)}{1!}\times f''(t)\,dt$$

En choisissant $f = \arctan$:

$$\arctan(b) = \arctan(a) + \frac{b-a}{1+a^2} + \int_a^b (b-t) \times \frac{-2t}{(1+t^2)^2} dt$$

Donc : $\left| \arctan(b) - \arctan(a) - \frac{b-a}{1+a^2} \right| \leq \int_a^b \left| \frac{-2t.(b-t)}{(1+t^2)^2} \right| dt = \int_a^b \frac{2|t|.(b-t)}{(1+t^2)^2} dt$

Mais $\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq (1+|t|)^2 = 1+t^2 - 2|t|$

donc $0 \leq 2|t| \leq 1+t^2$

donc $0 \leq \frac{2|t|}{1+t^2} \leq 1$

donc $0 \leq \frac{2|t|}{(1+t^2)^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$

donc $\forall t \in [a,b], 0 \leq \frac{2|t|.}{(1+t^2)^2}(b-t) \leq b-t$

Donc $\left| \arctan b - \arctan a - \frac{b-a}{1+a^2} \right| \leq \int_a^b (b-t) dt = \left[\frac{(b-t)^2}{2} \right]_{t=a}^{t=b}$.

Donc $\boxed{\left| \arctan b - \arctan a - \frac{b-a}{1+a^2} \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2}}$

Partie 2

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \longmapsto \frac{\arctan(xt)}{t^2+1}$ est continue sur $[0,1]$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc $f(x)$ existe. Ainsi $\boxed{\mathcal{D}f = \mathbb{R}}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(-xt)}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 -\frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\,dt$

$\displaystyle = -\int_0^1 \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\,dt = -f(x)$

Donc f est impaire.

$\displaystyle f(1) = \int_0^1 \frac{\arctan t}{1+t^2}\,dt = \left[\frac{1}{2}(\arctan t)^2\right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi^2}{32}}$

5. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tq $x < y$.

Pour $t \in [0,1]$: $xt \leqslant yt$ (égalité si $t = 0$)

donc $\arctan(xt) - \arctan(yt) \leqslant 0$ ($\arctan \nearrow$)

donc $\dfrac{\arctan(xt)}{1+t^2} - \dfrac{\arctan(yt)}{1+t^2} \leqslant 0$

Par croissance et linéarité de l'intégrale : $f(x) - f(y) \leqslant 0$.

Mais la fonction $t \longmapsto_{\theta} \dfrac{\arctan(xt)}{1+t^2} - \dfrac{\arctan(yt)}{1+t^2}$

est continue, négative et non identiquement nulle sur $[0,1]$

$\left(\theta(1) = \frac{1}{2}(\arctan x - \arctan y) < 0\right.$ car arctan str^t croissante$\left.\right)$.

Par stricte positivité de l'intégrale : $f(x) < f(y)$.

Donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

6.(a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$|f(x)-f(x_0)| = \left| \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\cdot \left(\arctan(xt)-\arctan(x_0t)\right) dt \right|$$

$$\leq \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\cdot \underbrace{|\arctan(xt)-\arctan(x_0t)|}_{\leq |x-x_0|.t \text{ d'après } 2.} dt$$

$$\leq |x-x_0|. \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = |x-x_0| \times \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1$$

$$= |x-x_0| \times \frac{\ln 2}{2}$$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)-f(x_0)| \leq \frac{\ln 2}{2} \times |x-x_0|}$

6.(b) Par encadrement : $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$

Donc f est continue en x_0.

C'est vrai pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

7.(a) Si $x>0$ et $t \in]0,\varepsilon]$ alors $xt \geq 0$

donc $0 \leq \frac{\pi}{2} - \arctan(xt) \underset{1.}{=} \arctan\left(\frac{1}{xt}\right) \leq \frac{\pi}{2}$

Et cette inégalité est vraie si $t=0$.

$$\left| \int_0^\varepsilon \frac{1}{1+t^2}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(xt)\right) dt \right| \leq \int_0^\varepsilon \left| \frac{1}{1+t^2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(xt)\right)\right| dt$$

Or si $t \in [0, \varepsilon]$:

$$\left|\frac{1}{(1+t^2)} \times \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(xt)\right)\right| = \frac{1}{1+t^2} \times \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(xt)\right)$$

$$\leq 1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Donc $\boxed{\left|\int_0^\varepsilon \frac{1}{1+t^2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(xt)\right) dt\right| \leq \int_0^\varepsilon \frac{\pi}{2} dt = \frac{\pi}{2}\varepsilon}$

Si $x > 0$ et $t \in [\varepsilon, 1]$: $xt > 0$ donc

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - \arctan(xt) = \arctan\left(\frac{1}{xt}\right)$$

donc $0 \leq \frac{1}{1+t^2}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(xt)\right) = \frac{1}{1+t^2} \arctan\left(\frac{1}{xt}\right)$

$$\leq \arctan\left(\frac{1}{xt}\right)$$

Donc $\left|\int_\varepsilon^1 \frac{1}{1+t^2}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(xt)\right) dt\right| \leq \int_\varepsilon^1 \left|\frac{1}{1+t^2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(xt)\right)\right| dt$

$$\leq \int_\varepsilon^1 \arctan\left(\frac{1}{xt}\right) dt$$

Mais d'après 2. on a $\left|\arctan\left(\frac{1}{xt}\right) - \arctan 0\right| \leq \left|\frac{1}{xt} - 0\right|$

donc comme $xt > 0$: $\arctan\left(\frac{1}{xt}\right) \leq \frac{1}{xt}$

Donc $\left|\int_\varepsilon^1 \frac{1}{1+t^2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(xt)\right) dt\right| \leq \int_\varepsilon^1 \frac{dt}{xt} = \frac{1}{x}\Big[\ln(|t|)\Big]_\varepsilon^1 = \frac{-\ln \varepsilon}{x}$

Mais comme $\varepsilon \in]0,1[$: $-\ln\varepsilon > 0$ donc $|\ln\varepsilon| = -\ln\varepsilon$

Ainsi $\boxed{\left| \int_\varepsilon^1 \frac{1}{1+t^2} \times \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(xt)\right) dt \right| \leq \frac{|\ln\varepsilon|}{x}}$

7. (b) Pour $x > 0$ et $\varepsilon \in]0,1[$:

$$\frac{\pi^2}{8} - f(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} - \int_0^1 \frac{\arctan(xt)}{1+t^2} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \times \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(xt)\right) dt$$

$$= \int_0^\varepsilon \frac{1}{1+t^2} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(xt)\right) dt + \int_\varepsilon^1 \frac{1}{1+t^2} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(xt)\right) dt$$

Avec l'inégalité triangulaire :

$$\left| \frac{\pi^2}{8} - f(x) \right| \leq \frac{\pi}{2}\varepsilon + \frac{|\ln\varepsilon|}{x}$$

or $\frac{|\ln\varepsilon|}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

donc $\exists A > 0,\ \forall x \geq A,\ \frac{|\ln\varepsilon|}{x} \leq \frac{\pi}{2}\varepsilon$

Alors $\forall x \geq A,\ \left| \frac{\pi^2}{8} - f(x) \right| \leq \pi\varepsilon$

Donc $\forall \varepsilon \in]0,1[,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \geq A,\ \left| \frac{\pi^2}{8} - f(x) \right| \leq \pi\varepsilon$

En posant $\varepsilon' = \pi\varepsilon$ on a :

$\forall \varepsilon' \in]0, \pi[, \exists A \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \geq A, \left| \frac{\pi^2}{8} - f(x) \right| \leq \varepsilon'$

et cette propriété est trivialement vrai si $\varepsilon' \geq \pi$

Donc $\forall \varepsilon' > 0, \exists A > 0, \forall x \geq A, \left| \frac{\pi^2}{8} - f(x) \right| \leq \varepsilon'$

Par définition : $\boxed{f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{\pi^2}{8}}$

8.(a) Soit $y \in \mathbb{R}$.

$$f(y) - f(x) - (y-x).g(x) = \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} \cdot \left(\arctan(yt) - \arctan(xt) - \frac{yt - xt}{x^2t^2+1} \right) dt$$

Comme $\frac{1}{1+t^2} \geq 0$ on a :

$$|f(y) - f(x) - (y-x).g(x)| \leq \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} \underbrace{\left| \arctan(yt) - \arctan(xt) - \frac{yt - xt}{x^2t^2+1} \right|}_{\underset{3.}{\leq} \frac{t^2}{2}(y-x)^2} dt$$

Donc $\boxed{|f(y) - f(x) - (y-x).g(x)| \leq \frac{(y-x)^2}{2} \cdot \int_0^1 \frac{t^2}{t^2+1} dt}$

8.(b) $\int_0^1 \frac{t^2}{t^2+1} dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = \left[t - \arctan t \right]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}$

Si $y \neq x$:

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y-x} - g(x) \right| \leq \frac{4-\pi}{8} \cdot (y-x)$$

Donc par encadrement :

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \xrightarrow[y\neq x]{y\to x} g(x)$$

Donc f est dérivable en x et $f'(x) = g(x) = \int_0^1 \frac{t}{(t^2+1)(1+x^2t^2)}\,dt$

On peut donc "dériver p/r à x sous le signe $\int$".

8. (c) $$\frac{1}{x^2-1}\times\left(\frac{x^2t}{x^2t^2+1}-\frac{t}{t^2+1}\right) = \frac{t}{x^2-1}\times\frac{\cancel{x^2t^2}+x^2-\cancel{x^2t^2}-1}{(x^2t^2+1)(t^2+1)}$$

$$= \frac{t}{(x^2t^2+1)(t^2+1)}$$

Donc $$f'(x) = \frac{1}{x^2-1}\cdot\int_0^1\left(\frac{x^2t}{x^2t^2+1}-\frac{t}{t^2+1}\right)dt$$

$$= \frac{1}{x^2-1}\cdot\left[\frac{1}{2}\ln(x^2t^2+1)-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right]_{t=0}^{t=1}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{x^2-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{x^2+1}{2}\right)}$$

9. D'après les théorèmes généraux, f est C^0 sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

Donc f est C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

$$\ln\left(\frac{x^2+1}{2}\right) = \ln\left(1+\frac{x^2-1}{2}\right) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{x^2-1}{2}$$

car $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\frac{x^2-1}{2} \xrightarrow[x\to 1]{} 0$

Donc $f'(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{4}$.

Donc $f'(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{1}{4}$

Comme f est C^0 sur $\mathbb{R}^+$ et C^1 sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

le théorème de prolongement du caractère C^1 donne

que f est C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et que $f'(1) = \frac{1}{4}$.

Comme f est impaire on en déduit que $\boxed{f \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$

et que $\boxed{f'(-1) = f'(1) = \frac{1}{4}}$

EXERCICE 2

Partie 1

1. $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$

donc $u(x) = x_1 u(e_1) + x_2 u(e_2) + x_3 u(e_3)$

$= x_1 . e_3 + x_2 . (-2e_1 - e_2) + x_3 . (2e_1 + e_2 + e_3)$

$= (-2x_2 + 2x_3) . e_1 + (-x_2 + x_3) . e_2 + (x_1 + x_3) . e_3$

Donc $\boxed{u(x) = (-2x_2 + 2x_3, -x_2 + x_3, x_1 + x_3)}$

Donc $u^2(x) = (-2(-x_2+x_3) + 2(x_1+x_3), -(-x_2+x_3) + x_1 + x_3, -2x_2 + 2x_3 + x_1 + x_3)$

$\boxed{u^2(x) = (2x_1 + 2x_2, x_1 + x_2, x_1 - 2x_2 + 3x_3)}$

2. Pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$:

$(x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{Ker}(u) \iff \begin{cases} -2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 \text{ qcq dans } \mathbb{R} \end{cases}$

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}\,((-1, 1, 1))}$

Comme $(-1, 1, 1) \neq (0, 0, 0)$, la famille $((-1,1,1))$ est une base de $\mathrm{Ker}(u)$.

$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{Ker}(u^2) \iff \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 \text{ qcq dans } \mathbb{R} \\ x_3 = x_2 \end{cases}$$

Donc $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Vect}((-1,1,1))$ et donc $\boxed{\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Ker}(u)}$

3.(a) Pour $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$u^3(x_1, x_2, x_3) = u\left(u^2(x_1, x_2, x_3)\right)$$

$$= u\left(2x_1 + 2x_2,\ x_1 + x_2,\ x_1 - 2x_2 + 3x_3\right)$$

$$= \left(-2x_1 - 2x_2 + 2x_1 - 4x_2 + 6x_3,\ -x_1 - x_2 + x_1 - 2x_2 + 3x_3,\ 2x_1 + 2x_2 + x_1 - 2x_2 + 3x_3\right)$$

$$= \left(-6x_2 + 6x_3,\ -3x_2 + 3x_3,\ 3x_1 + 3x_3\right)$$

$$= 3.u(x_1, x_2, x_3)$$

Donc $\boxed{u^3 = 3u}$

3.(b) Pour $p \in \mathbb{N}^*$ on note H_p le prédicat : "$u^{2p} = 3^{p-1}.u^2$ et $u^{2p+1} = 3^p.u$"

C'est vrai pour $p = 1$ car $u^2 = 3^0.u^2$ et $u^3 = 3.u$.

Supposons que H_p est vrai pour entier $p \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Alors $u^{2(p+1)} = u \circ u^{2p+1} = u \circ (3^{p-1}.u) = 3^p.u^2 = 3^{(p+1)-1}.u^2$

$u^{2(p+1)+1} = u \circ u^{2p+2} = u \circ (3^p.u^2) = 3^p.u^3 = 3^{p+1}.u$

Donc H_{p+1} est vrai.

Par récurrence : H_p est vrai pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

3.(c) $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Ker}(u^{2p}) = \mathrm{Ker}(3^{p-1} \cdot u^2) = \mathrm{Ker}(u^2) \underset{2.}{=} \mathrm{Ker}(u)$

$\mathrm{Ker}(u^{2p+1}) = \mathrm{Ker}(3^p u) = \mathrm{Ker}(u)$

Donc $\boxed{\forall q \in \mathbb{N}^*, \ \mathrm{Ker}(u^q) = \mathrm{Ker}(u)}$

4. $-x_2 + x_3 = 0 \iff \begin{cases} x_1 \text{ qcq} \\ x_2 = x_3 \\ x_3 \text{ qcq} \end{cases}$

donc $\boxed{F = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,1))}$

Donc F sev de $\mathbb{R}^3$.

Comme les vecteurs $(1,0,0)$ et $(0,1,1)$ sont non colinéaires,

la famille $((1,0,0),(0,1,1))$ est une base de F et $\dim(F) = 2$

5. $G = \mathrm{Vect}((0,0,1))$ Comme $(0,0,1) \neq (0,0,0)$ on a $\dim(G) = 1$

et $((0,0,1))$ est une base de G.

La famille $((1,0,0),(0,1,1),(0,0,1))$ est échelonnée (par la gauche)

donc libre. Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ elle est une base de $\mathbb{R}^3$.

Ceci prouve que $\boxed{\mathbb{R}^3 = F \oplus G.}$

Si $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{F}$ alors $x_2 = x_3$

donc $u(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, x_1 + x_3) = (x_1 + x_3).e_3 \in \mathbb{G}$

Donc $\boxed{u(\mathbb{F}) \subseteq \mathbb{G}}$

Si $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{G}$ alors $x_1 = x_2 = 0$

donc $u(x_1, x_2, x_3) = (2x_3, x_3, x_3) = x_3.(2,1,1)$

$= 2x_3.(1,0,0) + x_3.(0,1,1) \in \mathbb{F}$

Donc $\boxed{u(\mathbb{G}) \subseteq \mathbb{F}}$

Partie 2

6. Si $y \in \mathrm{Im}(f)$ alors $\exists x \in \mathbb{E}, y = f(x)$.

Donc $f(y) = f^2(x) = 0_{\mathbb{E}}$ puisque $f^2 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{E})}$

donc $y \in \mathrm{Ker}(f)$.

Ainsi $\boxed{\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f)}$ donc $\dim(\mathrm{Im} f) \leq \dim(\mathrm{Ker} f)$.

D'après le théorème du rang :

$\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathrm{Ker} f) + \dim(\mathrm{Im} f) \leq 2\dim(\mathrm{Ker} f)$

et donc $\boxed{\dim(\mathrm{Ker} f) \geq \frac{1}{2}.\dim(\mathbb{E})}$

7. Soit $x \in \mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{Ker}(\psi)$.

Alors $\varphi(x) = \psi(x) = 0_E$ donc $u(x) = \varphi(x) + \psi(x) = 0_E$

Comme $u \in GL(E)$: $x = 0_E$

Donc $\mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{Ker}(\psi) \subseteq \{0_E\}$

Comme $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Ker}(\psi)$ sont des sev de E on a donc :

$$\mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{Ker}(\psi) = \{0_E\} \quad (1)$$

Soit $y \in E$.

Comme $u \in GL(E)$: $\exists x \in E$; $y = u(x)$

Donc $y = \varphi(x) + \psi(x)$

Mais $\varphi^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $\varphi(x) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$

$\psi^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $\psi(x) \in \mathrm{Ker}(\psi)$

donc $y \in \mathrm{Ker}(\varphi) + \mathrm{Ker}(\psi)$.

Ceci prouve que $E \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi) + \mathrm{Ker}(\psi)$

Comme $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Ker}(\psi)$ sont des sev de E on a donc

$$E = \mathrm{Ker}(\varphi) + \mathrm{Ker}(\psi) \quad (2)$$

(1) et (2) prouvent que $\boxed{E = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Ker}(\psi)}$

8. On a donc $\dim \mathbb{E} = \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Ker}(\psi))$

Mais d'après 6. on a $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) \geqslant \frac{1}{2}\dim(\mathbb{E})$

et $\dim(\mathrm{Ker}(\psi)) \geqslant \frac{1}{2}\dim(\mathbb{E})$

Donc $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(\mathrm{Ker}(\psi)) = \frac{1}{2}\dim(\mathbb{E})$

Donc d'après le théorème du rang :

$\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \dim(\mathrm{Im}(\psi)) = \frac{1}{2}\dim(\mathbb{E})$

On a donc $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi))$

Mais d'après 6. on a aussi $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$

Donc $\boxed{\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi)}$ De même $\boxed{\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Ker}(\psi)}$

9. On pose $\mathbb{F} = \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Im}(\varphi)$ et $\mathbb{G} = \mathrm{Ker}(\psi) = \mathrm{Im}(\psi)$

D'après 7. et 8. $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des sev supplémentaires de $\mathbb{E}$.

Soit $y \in \mathbb{F}$. Alors $\exists x \in \mathbb{E},\ y = \varphi(x)$.

Comme $u = \varphi + \psi$ on a $u(x) = \varphi^2(x) + \psi(\varphi(x)) = \psi(\varphi(x))$

car $\varphi^2 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{E})}$

donc $u(x) \in \mathrm{Im}(\psi) = \mathbb{G}$. Ainsi $u(\mathbb{F}) \subseteq \mathbb{G}$

On montre de même que $u(\mathbb{G}) \subseteq \mathbb{F}$.

Donc $\boxed{u \text{ est un endomorphisme échangeur de } \mathbb{E}.}$

Partie 3

10. Soit $k \in \mathbb{N}$.

Si $x \in \mathbb{F}_k$ alors $u^k(x) = 0_{\mathbb{E}}$ donc $u^{k+1}(x) = u(0_{\mathbb{E}}) = 0_{\mathbb{E}}$
u linéaire

donc $x \in \mathbb{F}_{k+1}$. Ainsi $\boxed{\mathbb{F}_k \subseteq \mathbb{F}_{k+1}}$

Si $y \in \mathbb{G}_{k+1}$ alors $\exists x \in \mathbb{E},\ y = u^{k+1}(x)$

donc $y = u^k(u(x)) \in \mathbb{G}_k$

Ainsi $\boxed{\mathbb{G}_{k+1} \subseteq \mathbb{G}_k}$

11.(a) La suite $(\dim(\mathbb{F}_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est donc une suite croissante d'entiers majorée par $\dim(\mathbb{E})$. Elle ne peut donc pas être strictement croissante (sinon on aurait par récurrence immédiate $\forall k \in \mathbb{N},\ \dim \mathbb{F}_k \geqslant k$ et donc $\dim \mathbb{E} = +\infty$)
Donc $\exists k_0 \in \mathbb{N},\ \dim(\mathbb{F}_{k_0}) = \dim(\mathbb{F}_{k_0+1})$ et donc $k_0 \in A$ puisque $\mathbb{F}_{k_0} \subset \mathbb{F}_{k_0+1}$.
Donc $\boxed{A \neq \emptyset}$. De plus $\boxed{p \geqslant 1.}$ car $0 \notin A$ car $\mathbb{F}_0 = \{0_{\mathbb{E}}\} \neq \mathrm{Ker}(u) = \mathbb{F}_1$
puisque $u \notin GL(\mathbb{E})$

11.(b) Pour $k \geqslant p$ on note H_k le prédicat "$\mathbb{F}_k = \mathbb{F}_p$"

C'est vrai pour $k = p$ car $\mathbb{F}_p = \mathbb{F}_p$.

Soit $k \geqslant p$ entier fixé tel que $\mathbb{F}_k = \mathbb{F}_p$

D'après 10. on a $\mathbb{F}_k \subseteq \mathbb{F}_{k+1}$.

Soit $x \in \mathbb{F}_{k+1}$. Alors $u^{k+1}(x) = 0_{\mathbb{E}}$

donc $(u^{p+1} \circ u^{k-p})(x) = 0_{\mathbb{E}}$ (car $k - p \geqslant 0$)

donc $u^{k-p}(x) \in \mathbb{F}_p$

Mais $\mathbb{F}_p = \mathbb{F}_{p+1}$ d'après 11.(a).

Donc $u^{k-p}(x) \in \mathbb{F}_p$ donc $u^p(u^{k-p}(x)) = 0_{\mathbb{E}}$

donc $u^k(x) = 0_{\mathbb{E}}$ donc $x \in \mathbb{F}_k$.

Par double-inclusion, on obtient $\mathbb{F}_k = \mathbb{F}_{k+1}$.

D'après H_k on a $\mathbb{F}_k = \mathbb{F}_p$ donc on a aussi $\mathbb{F}_{k+1} = \mathbb{F}_p$.

Donc H_k est vrai.

Par récurrence, H_k est vrai pour tout entier $k \geq p$.

Soit $k \geq p$.

D'après le théorème du rang pour u^k et u^p on a :

$$\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F}_k) + \dim(\mathbb{G}_k)$$
$$\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F}_p) + \dim(\mathbb{G}_p)$$

Comme $\mathbb{F}_k = \mathbb{F}_p$ on a : $\dim(\mathbb{G}_k) = \dim(\mathbb{G}_p)$

Mais d'après 10. on a $\mathbb{G}_k \subseteq \mathbb{G}_p$.

Donc on a $\boxed{\forall k \geq p,\ \mathbb{G}_k = \mathbb{G}_p}$

12.(a) Soit $x \in \mathbb{F}_{2p}$. On a donc $u^{2p}(x) = 0_{\mathbb{E}}$

Alors $u^{2p}(u(x)) = u^{2p+1}(x) = u(u^{2p}(x)) = u(0_{\mathbb{E}}) \underset{u \text{ linéaire}}{=} 0_{\mathbb{E}}$

donc $u(x) \in \mathbb{F}_{2p}$.

Ainsi $\boxed{u(\mathbb{F}_{2p}) \subset \mathbb{F}_{2p}}$

12.(b) $\forall x \in F_{2p}$, $u^{2p}(x) = 0_E$

donc $u_0^{2p}(x) = 0_E$

Donc u_0 est nilpotent

13.(a) Soit $x \in G_{2p}$. Alors $\exists z \in E$, $x = u^{2p}(z)$

Mais alors $u(x) = u^{2p+1}(z) = u^{2p}(u(z)) \in G_{2p}$

donc $\boxed{u(G_{2p}) \subseteq G_{2p}}$

Soit $y \in G_{2p}$. Alors $\exists x \in E$, $y = u^{2p}(x) = u^{p}(u^{p}(x))$

Mais $u^p(x) \in G_p = G_{p+1}$ donc $\exists t \in E$, $u^p(x) = u^{p+1}(t)$

Alors $y = u^p(u^{p+1}(t)) = u^{2p+1}(t) = u(u^{2p}(t))$

Donc $\exists z \in G_{2p}$; $y = u(z)$ donc $z \in \mathrm{Im}(u_1)$.

Ceci prouve que u_1 est surjectif.

Comme $\dim(G_{2p}) < +\infty$ (car $\dim(E) < +\infty$) on

sait que u_1 est un automorphisme de G_{2p}.

13.(b) On a $u = \varphi + \psi$ donc $u^2 = \varphi^2 + \varphi\circ\psi + \psi\circ\varphi + \psi^2 = \varphi\circ\psi + \psi\circ\varphi$

Alors $\left.\begin{array}{l} \varphi\circ u^2 = \varphi^2\circ\psi + \varphi\circ\psi\circ\varphi = \varphi\circ\psi\circ\varphi \\ u^2\circ\varphi = \varphi\circ\psi\circ\varphi + \psi\circ\varphi^2 = \varphi\circ\psi\circ\varphi \end{array}\right\}$ donc φ commute avec u^2

Et de même ψ commute avec u^2.

Soit $y \in \mathbb{G}_{2p}$. Alors $\exists x \in \mathbb{E}$; $y = u^{2p}(x)$

Comme $p \geq 1$: $u^{2p} = \underbrace{u^2 \circ u^2 \circ \cdots \circ u^2}_{p \text{ termes}}$

donc $\varphi \circ u^2 = u^2 \circ \varphi$ donne $\varphi \circ u^{2p} = u^{2p} \circ \varphi$

Ainsi $\varphi(y) = \varphi(u^{2p}(x)) = u^{2p}(\varphi(x)) \in \mathbb{G}_{2p}$

Donc $\boxed{\varphi(\mathbb{G}_{2p}) \subseteq \mathbb{G}_{2p}}$ et de même $\boxed{\psi(\mathbb{G}_{2p}) \subseteq \mathbb{G}_{2p}}$

14. D'après le théorème du rang appliqué à u^{2p} on a :

$\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F}_{2p}) + \dim(\mathbb{G}_{2p})$

De plus :

$\mathbb{F}_{2p} \cap \mathbb{G}_{2p} = \mathrm{Ker}(u^{2p}) \cap \mathbb{G}_{2p} = \mathrm{Ker}(u_1^{2p}) = \{0_{\mathbb{E}}\}$

car $u_1^{2p} \in GL(\mathbb{G}_{2p})$ car $u_1 \in GL(\mathbb{G}_{2p})$

On a donc $\boxed{\mathbb{E} = \mathbb{F}_{2p} \oplus \mathbb{G}_{2p}}$

15. Comme u_0 est nilpotent alors et est échangeur donc il existe A, B sev de $\mathbb{F}_{2p}$ tels que $\mathbb{F}_{2p} = A \oplus B$, $u_0(A) \subseteq B$ et $u_0(B) \subseteq A$.

De plus on a $\begin{cases} u_1 = \varphi_1 + \psi_1 \\ \varphi_1^2 = \psi_1^2 = 0 \end{cases}$ et $u_1 \in GL(\mathbb{G}_{2p})$

Donc d'après la partie 2 on sait que u_1 est échangeur : il existe C, D sev de G_{2p} tels que

$$G_{2p} = C \oplus D \quad , \; u_1(C) \subseteq D \text{ et } u_1(D) \subseteq C$$

Comme $E = F_{2p} \oplus G_{2p}$ on a $E = (A \oplus B) \oplus (C \oplus D)$

On montre facilement : $E = (A \oplus C) \oplus (B \oplus D)$

Si $x = x_A + x_C \in A \oplus C$ alors :

$$u(x) = u(x_A) + u(x_C) = u_0(x_A) + u_1(x_C)$$

mais $x_A \in A$ donne $u_0(x_A) \in B$

$x_C \in C$ donne $u_1(x_C) \in D$

donc $u(x) \in B \oplus D$

donc $u(A \oplus C) \subseteq B \oplus D$

Si $x = x_B + x_D \in B \oplus D$ alors :

$$u(x) = u(x_B) + u(x_D) = u_0(x_B) + u_1(x_D) \in A \oplus C$$

donc $u(B \oplus D) \subseteq A \oplus C$

Ainsi <u>u est échangeur.</u>