Correction du DS9

EXERCICE 2

1. $t \longmapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[k, k+1]$ car $[k,k+1] \subset]0,+\infty[$

donc $\forall t \in [k,k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$

Donc par croissance de l'intégrale, on a :

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{k}$$

ie $\boxed{\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}}$.

2. On somme ces inégalités pour k allant de 1 à $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = S_n$$

Mais $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \underset{k'=k+1}{=} \sum_{k'=2}^{n+1} \frac{1}{k'} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} - 1$

$$= S_n + \frac{1}{n+1} - 1$$

et $\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \underset{\text{Chasles}}{=} \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1)$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\boxed{S_n + \frac{1}{n+1} - 1 \leqslant \ln(n+1) \leqslant S_n}$$

3. On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant \ln(n+1) - \frac{1}{n+1} + 1$

Donc $\forall n \geqslant 2, \quad \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leqslant \frac{S_n}{\ln n} \leqslant \frac{\ln(n+1)}{\ln n} - \frac{1}{(n+1)\ln n} + \frac{1}{\ln n}$

Mais $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

donc $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 + 0 = 1$

D'autre part : $\frac{1}{(n+1).\ln n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} - \frac{1}{(n+1).\ln n} + \frac{1}{\ln n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 - 0 + 0 = 1$

Donc par encadrement : $\frac{S_n}{\ln n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ ie $\boxed{S_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln n}$

4. D'après 2. on a $\forall n \geqslant 1, \quad S_n \geqslant \ln(n+1)$

donc $x_n \geqslant \ln(n+1) - \ln n \geqslant 0$

$\ln \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$

De plus $\forall n \geqslant 1, \quad x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant 0$

1.

Donc $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante minorée par 0.

D'après le théorème de la limite monotone on sait que

$\boxed{(x_n) \text{ est convergente}}$.

EXERCICE 3

1. (a) $\mathbb{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; \langle (x,y,z), (1,1,1) \rangle = 0\}$

donc $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}((1,1,1))^{\perp}$

Ceci prouve que $\boxed{\mathbb{F} \text{ est un sev de } \mathbb{R}^3.}$

Comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie $\mathbb{F}^{\perp} = \left(\mathrm{Vect}((1,1,1))^{\perp}\right)^{\perp}$

donc $\boxed{\mathbb{F}^{\perp} = \mathrm{Vect}((1,1,1))}$

D'autre part si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$x+y+z=0 \iff \begin{cases} x = -y-z \\ y, z \text{ quelconques dans } \mathbb{R} \end{cases}$$

Donc $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}((1,-1,0) ; (1,0,-1))$

Les vecteurs $u_1 = (1,-1,0)$ et $u_2 = (1,0,-1)$ sont non colinéaires

donc forment une base de $\mathbb{F}$.

En suivant l'algorithme de Gram-Schmidt :

on pose $w_1 = \frac{1}{\|u_1\|} \cdot u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1,-1,0)$

ensuite on pose $v_2 = u_2 - \langle u_2, w_1 \rangle . w_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$

$$= \frac{1}{2} \cdot (1,1,-2)$$

$$w_2 = \frac{1}{\|v_2\|} \cdot v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (1,1,-2)$$

Alors (w_1, w_2) est une b.on de $\mathbb{F}$.

Une bon de $F^\perp$ est $w_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (1,1,1)$

1.(b) $q = id - p$ est le projeté orthogonal sur $F^\perp$.

Alors $q(x,y,z) = \langle (x,y,z), w_3 \rangle . w_3 = \frac{1}{3}(x+y+z, x+y+z, x+y+z)$

donc $p(x,y,z) = (x,y,z) - q(x,y,z)$

$$\boxed{p(x,y,z) = \frac{1}{3}(2x-y-z, -x+2y-z, -x-y+2z)}$$

1.(c) Et donc $\boxed{\underset{B_{cano}}{\mathrm{Mat}}(p) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$

2.(a) De même $G = \mathrm{Vect}((1,0,-1))^\perp$ est un sev de $\mathbb{R}^3$

et $G^\perp = \mathrm{Vect}((1,0,-1))$

Comme $\dim(G^\perp) = 1$ on a $\dim(G) = 2$.

On voit que $w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ et $w_2 = (0,1,0)$ sont deux vecteurs orthonormés de G et forment donc une base de G.

De plus $w_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1,0,-1)$ est une bon de $G^\perp$

$p(x,y,z) = \langle (x,y,z), w_1 \rangle . w_1 + \langle (x,y,z), w_2 \rangle . w_2$

$= \frac{1}{2}(x+z, 0, x+z) + (0,y,0) = \boxed{\frac{1}{2}(x+z, 2y, x+z)}$

et donc $\boxed{\underset{\mathcal{B}_{cano}}{\mathrm{Mat}}(p) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

Alors $s = 2p - id$.

donc $\underset{\mathcal{B}_{cano}}{\mathrm{Mat}}(s) = 2 \cdot \underset{\mathcal{B}_{cano}}{\mathrm{Mat}}(p) - I_3 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

3. $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}\big((1,1,1,1), (1,-1,1,-1)\big)^{\perp}$

donc $\mathbb{F}$ sev de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{F}^{\perp} = \mathrm{Vect}\big((1,1,1,1), (1,-1,1,-1)\big)$

Une bon de $\mathbb{F}^{\perp}$ est : (w_1, w_2) avec $w_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$

$w_2 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)$

4. $q = id - p$ est la projection orthogonale sur $\mathbb{F}^{\perp}$ donc

$\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, $q(x,y,z,t) = \langle (x,y,z,t), w_1 \rangle . w_1 + \langle (x,y,z,t), w_2 \rangle . w_2$

$= \frac{1}{4}(x+y+z+t) . (1,1,1,1) + \frac{x-y+z-t}{4} . (1,-1,1,-1)$

$= \frac{1}{2}(x+z, y+t, x+z, y+t)$

$p(x,y,z,t) = (x,y,z,t) - \frac{1}{2}(x+z, y+t, x+z, y+t)$

$= \boxed{\frac{1}{2}(x-z, y-t, z-x, t-y)}$

et $\underset{\mathcal{B}_{cano}}{\mathrm{Mat}}(p) = \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

5. Comme $s = 2p - id$

on a $\underset{\mathcal{B}_{cano}}{\mathrm{Mat}}(s) = 2 \cdot \underset{\mathcal{B}_{cano}}{\mathrm{Mat}}(p) - I_3 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

6. D'après le théorème de meilleure approximation :

$d(u, F) = \|u - p(u)\| = \|q(u)\|$

$= \|\frac{1}{2} \cdot (4, 6, 4, 6)\| = \|(2, 3, 2, 3)\|$

$= \boxed{\sqrt{26}}$

EXERCICE 3

1. On a $u_0 > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel $u_n > 0$.

Alors $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} u_n > 0$.

Donc par récurrence on a : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n > 0}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{2n+2}{2n+5} - 1\right) u_n = -\frac{3}{2n+5} < 0$$

Donc (u_n) est décroissante et minorée par 0.

D'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel $\ell \geq 0$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{2n+2}{2n+5}\right) = \ln\left(1 - \frac{3}{2n+5}\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{3}{2n+5} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{3}{2n}$$

La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique) donc

en multipliant par $-\frac{3}{2}$ la série $\sum -\frac{3}{2n}$ diverge.

Par comparaison de séries à termes positifs (SATP) avec v, on sait que la série $\sum (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ diverge.

4. Comme $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \geqslant 0$ on a $\ln(u_n) \longrightarrow \begin{cases} \ln(l) \in \mathbb{R} \text{ si } l > 0 \\ -\infty \text{ si } l = 0 \end{cases}$

Comme la série $\sum (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ diverge on sait par dualité suite - séries que la suite $(\ln(u_n))_n$ diverge.

Donc $\boxed{l = 0}$.

5.(a) On remarque que $\forall n \geqslant 1$, $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha} \times \frac{2n+2}{2n+5}$

donc $\ln(v_n) = \alpha . \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln(2n+2) - \ln(2n+5)$

Or $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$

Par substitution : $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

et $\ln(2n+2) = \ln(2n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 2 + \ln n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\ln(2n+5) = \ln(2n) + \ln\left(1 + \frac{5}{2n}\right) = \ln 2 + \ln n + \frac{5}{2n} - \frac{25}{8n^2} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

donc $\ln(v_n) = \left(\alpha - \frac{3}{2}\right) \times \frac{1}{n} + \left(\frac{21}{8} - \frac{\alpha}{2}\right) \times \frac{1}{n^2} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Si $\alpha \neq \frac{3}{2}$ alors $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\alpha - \frac{3}{2}\right) \times \frac{1}{n}$

donc par comparaison de SATP : la série $\sum \ln(v_n)$ diverge.

Si $\alpha = \frac{3}{2}$ alors $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{15}{8} \times \frac{1}{n^2}$ et on sait que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$).

Par comparaison de SATP : la série $\sum \ln(v_n)$ converge.

Donc : $\boxed{\left(\text{la série } \sum \ln(v_n) \text{ converge}\right) \iff \alpha = \frac{3}{2}}$

6.(a) Pour $\alpha = \frac{3}{2}$ on a $\forall n \geq 1$, $v_n = \frac{(n+1)^{3/2} u_{n+1}}{n^{3/2} \cdot u_n}$

Alors $\forall n \geq 1$, $\ln(v_n) = \ln\left((n+1)^{3/2} u_{n+1}\right) - \ln\left(n^{3/2} \cdot u_n\right)$

Or la série $\sum \ln(v_n)$ converge vers S.

Par dualité suite-séries la suite $\left(\ln\left(n^{3/2} \cdot u_n\right)\right)_n$ converge vers un réel L tel que $S = L - \ln\left(1^{3/2} \cdot u_1\right)$

donc $L = S + \ln(u_1) = \boxed{S + \ln\left(\frac{2}{5}\right)}$

Par continuité de l'exponentielle on a :

$$n^{3/2} \cdot u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{S} \times e^{\ln(2/5)} = \frac{2}{5} \cdot e^{S}$$

Et donc comme $\frac{2}{5}\cdot e^s \neq 0$:

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2e^s}{5n^{3/2}}}$$

La série $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est convergente (séries de Riemann avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$). Donc la série $\sum \frac{2e^s}{5n^{3/2}}$ l'est aussi (on multiplie par une constante).

Par comparaison de SATP, la série $\sum u_n$ converge.

6.(b) On a :

$$2\sum_{k=1}^{n+1} k u_k = 2\sum_{k=1}^{n+1} \underbrace{(k+1)u_k}_{=\frac{2k+5}{2}u_{k+1}} - 2\sum_{k=1}^{n+1} u_k \quad \text{car } k=(k+1)-1$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}(2k+5)u_{k+1} - 2\sum_{k=1}^{n+1} u_k$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n+1}(k+1)u_{k+1} + 3\cdot\sum_{k=1}^{n+1} u_{k+1} - 2\sum_{k=1}^{n+1} u_k$$

Si on pose $k'=k+1$ dans les deux premières sommes du membre de droite :

$$2\cdot\sum_{k=1}^{n+1} k u_k = 2\cdot\sum_{k=2}^{n+2} k u_k + 3\sum_{k=2}^{n+2} u_k - 2\sum_{k=1}^{n+1} u_k$$

6.(c) On a donc :

$$2u_1 - 2(n+2)u_{n+2} = 2.\sum_{k=1}^{n+1} k u_k - 2\sum_{k=2}^{n+2} k u_k$$

$$\underset{6.(b)}{=} 3.\sum_{k=2}^{n+2} u_k - 2\sum_{k=1}^{n+1} u_k$$

$$= 3.\left(T_n + u_{n+2} + u_{n+1} - u_1 - u_0\right) - 2.\left(T_n + u_{n+1} - u_0\right)$$

Donc $T_n = 2u_1 - 2(n+2)u_{n+2} + 3u_1 + 3u_0 + 2u_{n+1} - 2u_0$

$$= 2(n+2)u_{n+2} + 2u_{n+1} + 3$$

Mais avec la question 6.(a) on a :

$$(n+2)u_{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2e^5}{5\sqrt{n}} \quad \text{donc } (n+2)u_{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2e^5}{5n^{3/2}} \quad \text{donc } u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Par somme de limites : $T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$

On a donc $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 3}$

6. (d)

```
def somme(n):
    if n==0:
        return 1
    else:
        t=1
        x=1
        for k in range(n):
            x=(2*k+2)*x/(2*k+5)
            t=t+x
        return t
```