Correction du DS*9

EXERCICE 1

1. $G(u_1) = \left(\|u_1\|^2\right)$ Matrice avec 1 ligne / 1 colonne

donc $\boxed{\det G(u_1) = \|u_1\|^2}$

$$G(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} \|u_1\|^2 & \langle u_1, u_2\rangle \\ \langle u_1, u_2\rangle & \|u_2\|^2 \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{\det G(u_1, u_2) = \|u_1\|^2 \times \|u_2\|^2 - \langle u_1, u_2\rangle^2}$

2. $\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que $(u_1, \dots, u_p)$ est liée.

Donc un des vecteurs est CL des autres :

$$\exists k \in [\![1, p]\!], \ \exists (\alpha_j)_{\substack{1 \leq j \leq p \\ j \neq k}} \in \mathbb{K}^{p-1} \ ; \ u_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} \alpha_j u_j$$

On a alors $\forall i \in [\![1, p]\!], \ \langle u_i, u_k\rangle = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{p} \alpha_j \langle u_i, u_j\rangle$

Donc si on note $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de la matrice $G(u_1, \dots, u_p)$:

$$C_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} \alpha_j . C_j$$

donc les colonnes de $G(u_1, \dots, u_p)$ sont liées et donc :

$$\det(G(u_1, \dots, u_p)) = 0$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $\det(G(u_1,\dots,u_p))=0$

Donc les colonnes de la matrice $G(u_1,\dots,u_p)$ notées $C_1,\dots,C_p$ sont liées :

$$\exists k\in[\![1,n]\!],\ \exists(\alpha_j)_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq k}}\in\mathbb{R}^{n-1};\ C_k=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\alpha_j\cdot C_j$$

Donc $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\langle u_i,u_k\rangle=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\alpha_j\cdot\langle u_i,u_j\rangle$

$$\langle u_i,\underbrace{u_k-\sum_{j\neq k}\alpha_j\cdot u_j}_{\in F}\rangle=0$$

donc $u_k-\sum_{j\neq k}\alpha_j u_j\in F^{\perp}$ où l'orthogonal est pris dans F donc $F^{\perp}=\{0_E\}$

donc $u_k-\sum_{j\neq k}\alpha_j u_j=0_E$

donc $u_k=\sum_{j\neq k}\alpha_j u_j$ donc la famille $(u_1,\dots,u_p)$ est liée.

<u>3.(a)</u> Si $u_p\in\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_{p-1})^{\perp}$ alors :

$$G(u_1,\dots,u_{p-1},u_p)=\left(\begin{array}{ccc|c} & G(u_1,\dots,u_{p-1}) & & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\\ \hline 0 & 0\ \cdots & 0 & \|u_p\|^2\end{array}\right)$$

Donc $\boxed{\det\left(G(u_1,\dots,u_{p-1},u_p)\right) = \|u_p\|^2 \times \det\left(G(u_1,\dots,u_{p-1})\right)}$

3.(b) On a $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\langle e_i, x\rangle = \langle e_i, p_F(x) + p_{F^\perp}(x)\rangle$

$$= \langle e_i, p_F(x)\rangle + \underbrace{\langle \underset{\in F}{e_i}, \underset{\in F^\perp}{p_{F^\perp}(x)}\rangle}_{=0}$$

$$= \langle e_i, p_F(x)\rangle$$

De même $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $\langle x, e_j\rangle = \langle p_F(x), e_j\rangle$

Enfin $\langle x, x\rangle = \|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|p_{F^\perp}(x)\|^2$ d'après Pythagore

Donc
$$G(e_1,\dots,e_p,x) = \left(\begin{array}{c|c} G(e_1,\dots,e_p) & \begin{matrix}\langle e_1, p_F(x)\rangle \\ \vdots \\ \langle e_p, p_F(x)\rangle\end{matrix} \\ \hline \langle p_F(x), e_1\rangle \; \dots \; \langle p_F(x), e_p\rangle & \|p_F(x)\|^2 + \|p_{F^\perp}(x)\|^2 \end{array}\right)$$

Par linéarité par rapport à la dernière colonne :

$$\det\left(G(e_1,\dots,e_p,x)\right) = \det\left(G(e_1,\dots,e_p,p_F(x))\right) + \left|\begin{array}{c|c} G(e_1,\dots,e_p) & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} \\ \hline * & \|p_{F^\perp}(x)\|^2 \end{array}\right|$$

$$= \det\left(G(e_1,\dots,e_p,p_F(x))\right) + \|p_{F^\perp}(x)\|^2 \times \det\left(G(e_1,\dots,e_p)\right)$$

Or $p_F(x) \in F = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p)$ donc d'après 1. on a :

$$\det\left(G(e_1,\dots,e_p,p_F(x))\right) = 0$$

Comme la norme est positive :

$$\|p_{F^\perp}(x)\| = \sqrt{\frac{\det(G(e_1,\dots,e_p,x))}{\det(G(e_1,\dots,e_p))}}$$

Et d'après le théorème de meilleure approximation on a

$$d(x,F) = \|p_{F^\perp}(x)\|$$

D'où le résultat.

4.(a) Soit $j \in [\![1,p]\!]$.

D'après le cours $u_j = \sum_{i=1}^{k} \langle u_j, e_i\rangle e_i$

puisque $(e_1,\dots,e_k)$ est une bon de F.

Pour $(i,j) \in [\![1,k]\!] \times [\![1,p]\!]$, $M_{i,j} = \langle u_j, e_i\rangle = \langle e_i, u_j\rangle$

De plus ${}^tM.M \in M_p(\mathbb{R})$ et :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \ ({}^tM.M)_{i,j} = \sum_{l=1}^{k} M_{l,i} \times M_{l,j} = \sum_{l=1}^{k} \langle u_i, e_l\rangle \times \langle u_j, e_l\rangle$$

Pour simplifier on note G pour $G(u_1,\dots,u_p)$.

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \ G_{i,j} = \langle u_i, u_j\rangle = \sum_{l=1}^{k} \langle u_i, e_l\rangle \times \langle u_j, e_l\rangle$$

expression du produit scalaire dans une bon

On a donc $\boxed{G = {}^tM \times M}$

4.(b) $\boxed{\text{Cas 1}}$ $(u_1, \dots, u_p)$ est libre. Alors $\dim F = p = k$ donc la matrice M est carrée et donc $\det(G) = \det({}^tM) \times \det M = (\det M)^2 \geq 0$

Mais comme $(u_1, \dots, u_p)$ est une base de F alors M est inversible et donc $\det M \neq 0$. Finalement $\det(G) > 0$.

$\boxed{\text{Cas 2}}$ $(u_1, \dots, u_p)$ est liée. Alors $\dim(F) = k > p$.

On a : $\operatorname{rg} G = \operatorname{rg}({}^tM \times M) \leq \min(\operatorname{rg}({}^tM), \operatorname{rg} M) = \operatorname{rg} M < p$
car $(u_1, \dots, u_p)$ liée.

donc G n'est pas inversible et $\det(G) = 0$.

$\boxed{\text{Conclusion}}$ $\det(G) \geq 0$ et $\boxed{\det(G) = 0 \iff (u_1, \dots, u_p) \text{ est liée}}$

4.(c) Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Si $X \in \operatorname{Ker}(G)$ alors $GX = 0_{p,1}$ donc ${}^tMMX = 0_{p,1}$

donc ${}^tX\,{}^tMMX = 0$ donc ${}^t(MX)MX = 0$

donc $MX = 0_{k,1}$ (d'après l'indication)

donc $X \in \operatorname{Ker}(M)$.

Si $X \in \operatorname{Ker}(M)$ alors $MX = 0_{k,1}$ donc ${}^tMMX = 0_{p,1}$

ie $GX = 0_{p,1}$. Ainsi $X \in \operatorname{Ker}(G)$.

Par double-inclusion : $\boxed{\operatorname{Ker}(G) = \operatorname{Ker}(M)}$

On a donc $\dim(\operatorname{Ker}(G)) = \dim(\operatorname{Ker}(M))$.

Comme G et M ont le même nombre de colonnes on a d'après le théorème du rang : $\operatorname{rg}(G) = \operatorname{rg}(M)$

Et donc $\boxed{\mathrm{rg}(G) = \mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p)}$

EXERCICE 2

1. On utilise deux IPP consécutives (les fonctions en jeu étant C^∞ sur $[0,\pi]$, elles sont C^1 sur $[0,\pi]$ et il en est de même pour leurs dérivées successives) :

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(nt)\,dt = \left[\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi}-1\right)\frac{1}{n}\sin(nt)\,dt$$

$$= -\frac{1}{n}\cdot\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi}-1\right)\sin(nt)\,dt$$

$$= -\frac{1}{n}\left[\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\frac{-1}{n}\cos(nt)\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \frac{-1}{n}\cdot\cos(nt)\,dt$$

$$= -\frac{1}{n}\left(0-\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^2}\left[-\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_0^\pi$$

$$= \frac{1}{n^2} - 0 = \boxed{\frac{1}{n^2}}$$

2. $$\frac{1-e^{int}}{1-e^{it}}e^{it} = \frac{e^{i\frac{m}{2}t}}{e^{i\frac{1}{2}t}} \times \frac{e^{-i\frac{m}{2}t}-e^{i\frac{m}{2}t}}{e^{-i\frac{t}{2}}-e^{i\frac{t}{2}}} \times e^{it}$$

$$= e^{i\frac{m+1}{2}t} \times \frac{-2i\sin\left(\frac{mt}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \boxed{\frac{\sin\left(\frac{mt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} e^{i\frac{m+1}{2}t}}$$

or on a aussi $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} e^{ikt} = e^{it} \times \frac{1-e^{int}}{1-e^{it}}$

En prenant les parties réelles :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \cos\left(\frac{n+1}{2} t\right)}$$

3.(a) f est C^1 sur $]0,\pi]$ par quotient de fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas.

De plus $f(0) = -1$

$$f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{-t}{2\frac{t}{2}} \underset{t\to 0^+}{\sim} -1 \text{ donc } f(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} -1$$

Donc f est continue en 0.

$$\forall t \in]0,\pi], \quad f'(t) = \frac{\left(\frac{t}{\pi}-1\right).\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Notons $\alpha(t)$ le numérateur et $\beta(t)$ le dénominateur.

$$\alpha(t) = \left(\frac{t}{\pi}-1\right)\left(\frac{t}{2} - \frac{t^3}{48} + \underset{t\to 0}{o}(t^3)\right) - \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\frac{1}{2}\left(1-\frac{t^2}{8} + \underset{t\to 0}{o}(t^2)\right)$$

$$= -\frac{t}{2} + \frac{t^2}{2\pi} + \frac{t^3}{48} + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4\pi} - \frac{t^3}{16} + \underset{t\to 0}{o}(t^3)$$

$$= \frac{t^2}{4\pi} - \frac{t^3}{24} + \underset{t\to 0}{o}(t^3)$$

l'ordre 2 aurait suffit !

Donc $\alpha(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{t^2}{4\pi}$

$\beta(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} 2\dfrac{t^2}{4} = \dfrac{t^2}{2}$

donc $f'(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{2\pi}$

Donc $f'(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} \dfrac{1}{2\pi}$.

Comme f est continue sur $[0,\pi]$ et C^1 sur $]0,\pi]$

on peut en déduire que f est C^1 sur $[0,\pi]$

et que $f'(0) = \dfrac{1}{2\pi}$, d'après le théorème de prolongement

du caractère C^1.

3.(b) On a :

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{m} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)\,dt$$

$$= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\left(\sum_{n=1}^{m} \cos(nt)\right)dt$$

Or si $t \in]0,\pi]$:

$$\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\sum_{n=1}^{m} \cos(nt) = \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\frac{\cos\left(\frac{m+1}{2}t\right).\sin\left(\frac{mt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$= 2.f(t).\cos\left(\frac{m+1}{2}t\right).\sin\left(\frac{mt}{2}\right)$$

Mais si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$: $\cos a . \sin b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right)$

Donc pour $t \in]0, 2\pi]$ on a :

$$\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \sum_{n=1}^{m} \cos(nt) = f(t) \times \sin\left(\frac{2m+1}{2} t\right) - f(t) \times \sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$= f(t) \times \sin\left(\frac{2m+1}{2} t\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)$$

et cette égalité est vrai si $t = 0$ donc pour $t \in [0, \pi]$.

On injecte dans l'intégrale :

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \int_0^{\pi} f(t) \times \sin\left(\frac{2m+1}{2} t\right) dt - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) dt$$

or $\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) dt = \left[\frac{t^3}{6\pi} - \frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{6\pi} - \frac{\pi^2}{2} = -\frac{\pi^2}{3}$

Donc : $$\boxed{\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} f(t) \times \sin\left(\frac{2m+1}{2} t\right) dt}$$

3.(c)

On comme f est C^1 sur $[0, \pi]$:

$$\int_0^{\pi} f(t) \times \sin\left(\frac{2m+1}{2} t\right) dt = \left[f(t) \times \frac{-2}{2m+1} \cos\left(\frac{2m+1}{2} t\right)\right]_0^{\pi}$$

$$+ \frac{2}{2m+1} \int_0^{\pi} f'(t) \cos\left(\frac{2m+1}{2} t\right) dt$$

Donc :

$$0 \leq \left| \int_0^{\pi} f(t) \times \sin\left(\frac{2m+1}{2}t\right) dt \right| \leq \frac{2}{2m+1}\left(|f(\pi)| + |f(0)| + \int_0^{\pi} |f'(t)| dt \right)$$

d'après l'inégalité triangulaire pour Σ et $\int$.

Par encadrement : $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t) \times \sin\left(\frac{2m+1}{2}t\right) dt \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$

(c'est le lemme de Riemann Lebesgue)

Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} \xrightarrow[m \to +\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$

Donc la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ converge et $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

EXERCICE 3

1. Le premier lancer donne P ou F.
Dans les deux cas $\underline{N_1 = 1}$ donc $\underline{\mathbb{E}(N_1) = 1}$ et $\underline{V(N_1) = 0}$.

Les deux premiers lancers donnant : PP ou PF ou FP ou FF
avec probabilité : p^2 $\quad pq$ $\quad qp$ $\quad q^2$ $\quad (p+q)^2 = 1$

D'où la loi de N_2 :

k	1	2
$\mathbb{P}(N_2 = k)$	p^2+q^2	$2pq$

$\mathbb{E}(N_2) = p^2+q^2+4pq = \underline{1+2pq}$

$\mathbb{E}(N_2^2) = p^2+q^2+8pq = 1+6pq$

$V(N_2) = 2pq - 4p^2q^2 = \underline{2pq(1-2pq)}$

Pour 3 lancers : PPP PPF PFP FPP PFF FPF PFF FFF
p^3 $\quad p^2q$ $\quad p^2q$ $\quad p^2q$ $\quad q^2p$ $\quad q^2p$ $\quad q^2p$ $\quad q^3$

k	1	2	3
$\mathbb{P}(N_3 = k)$	p^3+q^3	$2p^2q+2q^2p$	p^2q+q^2p

$\mathbb{E}(N_3) = p^3+q^3+7p^2q+7q^2p$
$= 1+4p^2q+4q^2p$
$= \underline{1+4pq}$

$\mathbb{E}(N_3^2) = p^3+q^3+17p^2q+17q^2p = 1+14p^2q+14q^2p = 1+14pq$

$V(N_3) = 1+14pq - 1 - 8pq - 16p^2q^2 = 6pq - 16p^2q^2 = \underline{2pq(3-8pq)}$

2. $\underline{N_n(\Omega) = [\![1, n]\!]}$.
$N_n = 1$ si on obtient que des Piles ou que des Faces.
$N_n = n$ si on obtient à chaque lancer une face différente de celle obtenue au lancer précédent.

On a donc $\boxed{\mathbb{P}(N_n=1)=p^n+q^n}$

$$\mathbb{P}(N_n=n)=\mathbb{P}(\{PFPF\ldots PF\,;\ FPFP\ldots FP\}) \quad \text{si } n \text{ pair}$$

$$= p^{n/2}q^{n/2}+q^{n/2}p^{n/2} = 2p^{n/2}q^{n/2} \quad \underline{\text{si } n \text{ pair}}$$

$$\mathbb{P}(N_n=n)=\mathbb{P}(\{PFPF\ldots PFP\,;\ FPFP\ldots FPF\}) \quad \text{si } n \text{ impair}$$

$$= p^{\frac{n+1}{2}}q^{\frac{n-1}{2}}+q^{\frac{n+1}{2}}p^{\frac{n-1}{2}}$$

$$= p^{\frac{n-1}{2}}q^{\frac{n-1}{2}}\times(p+q)=p^{\frac{n-1}{2}}q^{\frac{n-1}{2}} \quad \underline{\text{si } n \text{ impair}}$$

Donc $\boxed{\mathbb{P}(N_n=n)=p^{\lfloor n/2\rfloor}\times q^{\lfloor n/2\rfloor}}$

<u>3.</u>

```
m=int(input('Valeur de m ? '))
X=[ ]
for k in range(0,m):
    X.append(0)
N=[ ]
for k in range(0,m):
    N.append(0)
X[0]= int(rand()<0.5)
N[0]=1
for i in range(1,m):
    X[i]=int(rand()<0.5)
    if X[i]!=X[i-1]:
        N[i]=N[i-1]+1
    else:
        N[i]=N[i-1]
print(X)
print(N)
```

4.(a) D'après le théorème de transfert : $\mathbb{E}(s^{N_n}) = G_n(s)$

4.(b) $\forall s \in [0,1]$, $G_n'(s) = \sum_{k=1}^{n} k.\mathbb{P}(N_n = k).s^{k-1}$

donc $G_n'(1) = \sum_{k=1}^{n} k.\mathbb{P}(N_n=k) = \mathbb{E}(N_n)$

4.(c) Comme (P_{n-1}, F_{n-1}) est un système complet d'événements on a :

$$\mathbb{P}((N_n=k)\cap P_n) = \mathbb{P}((N_n=k)\cap P_{n-1}\cap P_n) + \mathbb{P}((N_n=k)\cap F_{n-1}\cap P_n)$$

Mais on remarque que $(N_n=k)\cap P_{n-1}\cap P_n = (N_{n-1}=k)\cap P_{n-1}\cap P_n$

car si le dernier lancer est identique à l'avant dernier, le nombre de séries est inchangé.

Mais comme les lancers sont faits de manières indépendantes, les événements $(N_{n-1}=k)\cap P_{n-1}$ et P_n sont indépendants.

On a donc
$$\begin{aligned}\mathbb{P}((N_n=k)\cap P_{n-1}\cap P_n) &= \mathbb{P}((N_{n-1}=k)\cap P_{n-1}\cap P_n)\\ &= \mathbb{P}((N_{n-1}=k)\cap P_{n-1})\times\mathbb{P}(P_n)\\ &= \frac{1}{2}.\mathbb{P}((N_{n-1}=k)\cap P_{n-1})\end{aligned}$$

De même $(N_n=k)\cap F_{n-1}\cap P_n = (N_{n-1}=k-1)\cap F_{n-1}\cap P_n$

donc $\mathbb{P}((N_n=k)\cap F_{n-1}\cap P_n) = \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_{n-1}=k-1)\cap F_{n-1})$

Donc :

$$\mathbb{P}((N_n=k)\cap P_n) = \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_{n-1}=k)\cap P_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_{n-1}=k-1)\cap F_{n-1})$$

De même :

$$\mathbb{P}((N_n=k)\cap F_n) = \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_{n-1}=k)\cap F_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_{n-1}=k-1)\cap P_{n-1})$$

En additionnant les deux on obtient :

$$\boxed{\mathbb{P}(N_n=k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_{n-1}=k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_{n-1}=k-1)}$$

puisque (P_n, F_n) et (P_{n-1}, F_{n-1}) sont des systèmes complets d'événements.

4. (d) Soit $s \in [0,1]$.

Pour $k \in [\![1,n]\!]$ on a donc :

$$s^k.\mathbb{P}(N_n=k) = \frac{s^k}{2}.\mathbb{P}(N_{n-1}=k) + \frac{s^k}{2}\mathbb{P}(N_{n-1}=k-1)$$

On somme ces égalités pour k allant de 1 à n :

$$G_n(s) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} s^k.\mathbb{P}(N_{n-1}=k) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} s^k.\mathbb{P}(N_{n-1}=k-1)$$

Mais $$\sum_{k=1}^{n} s^k.\mathbb{P}(N_{n-1}=k) = \sum_{k=1}^{n-1} s^k.\mathbb{P}(N_{n-1}=k) + s^n.\underbrace{\mathbb{P}(N_{n-1}=n)}_{=0}$$

$$= G_{n-1}(s)$$

Et $\sum_{k=1}^{n} s^k . \mathbb{P}(N_{n-1}=k-1) \underset{k'=k-1}{=} \sum_{k'=0}^{n-1} s^{k'+1} . \mathbb{P}(N_{n-1}=k')$

$$= s \times \underbrace{\mathbb{P}(N_{n-1}=0)}_{=0} + s \times \sum_{k=1}^{n-1} s^k . \mathbb{P}(N_{n-1}=k)$$

$$= s \times G_{n-1}(s)$$

Donc $G_n(s) = \frac{1}{2} G_{n-1}(s) + \frac{s}{2} \times G_{n-1}(s) = \boxed{\frac{1+s}{2} . G_{n-1}(s)}$

$G_1(s) = s \times 1 = \boxed{s}$

Par récurrence immédiate : $G_n(s) = s\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1}$

4.(e) $G_n'(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} + s \times \frac{(n-1)}{2}\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2}$ si $n \geqslant 2$ et $s \in [0,1]$

Donc pour $n \geqslant 2$: $\mathbb{E}(N_n) = G_n'(1) = 1 + \frac{n-1}{2} = \boxed{\frac{n+1}{2}}$

Et cette formule est vraie pour $n=1$

On remarque que d'après le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}[N_n(N_n-1)] = \sum_{k=1}^{n} k(k-1) . \mathbb{P}(N_n=k)$$

$$= G_n''(1)$$

Mais pour $n \geqslant 3$:

$$\forall s \in [0,1], \ G_n''(s) = \frac{n-1}{2}\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2} + \frac{n-1}{2}\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2} + s\,\frac{(n-1)(n-2)}{4}\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-3}$$

donc

$$G_n''(1) = n-1 + \frac{(n-1)(n-2)}{4} = \frac{n-1}{4}(4+n-2) = \frac{(n-1)(n+2)}{4}$$

D'après la formule de Koenig Huyghens :

$$\begin{aligned}
V(N_n) &= \mathbb{E}(N_n^2) - (\mathbb{E}N_n)^2 \\
&= \mathbb{E}(N_n(N_n-1)) + \mathbb{E}(N_n) - \mathbb{E}(N_n)^2 \\
&= \frac{(n-1)(n+2)}{4} + \frac{n+1}{2} - \frac{(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{(n-1)(n+2)}{4} + \frac{n+1}{4}(2-(n+1)) \\
&= \frac{(n-1)(n+2)}{4} + \frac{(n+1)(1-n)}{4} \\
&= \frac{n-1}{4}.(n+2-(n+1)) = \boxed{\frac{n-1}{4}} \quad \text{pour } n \geqslant 3
\end{aligned}$$

$\mathbb{E}$ linéaire

et c'est vrai si $n = 1$ ou 2

4.(q) Pour tout $s \in [0,1]$:

$$G_n(s) = s\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} = \frac{s}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} s^k$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \times \sum_{k'=1}^{n} \binom{n-1}{k'-1} s^{k'} \quad \text{en posant } k' = k+1$$

La fonction polynomiale $G_n - \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} X^k$

a une infinité de racines et est donc le polynôme nul.

Donc par unicité des coefficients :

$$\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(N_n = k) = \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{2^{n-1}}}$$

Donc $\forall j \in [\![0,n-1]\!]$, $\mathbb{P}(N_n - 1 = j) = \mathbb{P}(N_n = j+1)$

$$= \binom{n-1}{j} \frac{1}{2^{n-1}}$$

On reconnaît $\boxed{N_n - 1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n-1, \frac{1}{2}\right)}$

EXERCICE 4

1. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$

De plus $v_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} = u_n$

On sait que la série $\sum u_n$ diverge (série de Riemann avec $\alpha = 1 \leq 1$)

D'après (R) : $\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} v_k$

ie $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n+1)$

Mais $\ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln n + \underset{n\to+\infty}{o}(\ln n)$

donc $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$

Et donc $\boxed{H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n}$

2.(a) On pose $\forall n \geq 2$, $u_n = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n)$

$v_n = \frac{1}{n.\ln(n)}$ et $u_1 = v_1 = 0$

On a $\forall n \geq 2$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$

De plus $u_n = \ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$

or $\frac{1}{\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{0}{+\infty} = 0$

donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln n} \times \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$

Enfin $\ln(\ln n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc d'après le théorème de dualité suite-séries, la série $\sum u_n$ diverge.

D'après (R) : $\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} v_k$

ie $\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.\ln k}$

Mais $\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) = \ln(\ln n) + \underbrace{\ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right) - \ln 2}_{\underset{n\to+\infty}{=} o(\ln(\ln n))}$

car $\ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $\boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln n)}$

2.(b) Comme $\ln(\ln n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ on a $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

donc la série $\sum \frac{1}{n.\ln n}$ diverge.

2.(c) f est dérivable sur $[2,+\infty[$ et :

$$\forall t \geq 2,\quad f'(t) = \frac{-1-\ln t}{t^2 \cdot \ln(t)^2} = -\frac{\ln t + 1}{t^2 \ln^2 t} < 0 \text{ car } t \geq 2$$

Donc f est décroissante sur $[2,+\infty[$.

On a donc $\forall k \geq 2$, $\forall t \in [k,k+1]$, $f(k) \geq f(t)$

donc $f(k) = \int_k^{k+1} f(k)\,dt \geq \int_k^{k+1} f(t)\,dt$

Pour $n \geq 2$ on somme ces inégalités pour k allant de 2 à n :

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \geq \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} f(t)\,dt$$

ie $$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \cdot \ln k} \geq \int_2^{n+1} \frac{dt}{t \ln t}}$$

Mais $\int_2^{n+1} \frac{dt}{t\ln t} = \Big[\ln|\ln t|\Big]_2^{n+1} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Par minoration : $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \cdot \ln k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Donc $\boxed{\text{la série } \sum \frac{1}{n \cdot \ln n} \text{ diverge.}}$

3.(a) • $a_1 = 1 \geqslant 1$

• la suite (a_n) est constante donc bornée

• $\forall n \geqslant 1,\ a_n = 1 > 0$.

• la série $\sum a_n$ diverge (grossièrement)

Donc (a_n) vérifie la propriété (P).

$$\forall n \geqslant 1,\ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = n$$

$$\forall n \geqslant 2,\ b_n = \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{\ln n} H_n .$$

D'après 1. on sait que $\boxed{b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1}$.

3.(b) • $a_1 = 1 \geqslant 1$

• $\forall n \geqslant 1,\ 0 < \frac{1}{n} \leqslant 1$ donc la suite (a_n) est bornée.

• $\forall n \geqslant 1\ a_n > 0$

• la série $\sum a_n$ diverge (c'est la série harmonique)

Donc (a_n) vérifie (P).

$$\forall n \geqslant 1,\ A_n = H_n$$

$\forall n \geqslant 2,\quad b_n = \dfrac{1}{\ln H_n} \times \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k . H_k}$

Or a $\quad \dfrac{1}{n . H_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n . \ln n}$ et ces deux suites sont à termes > 0.

La série $\sum \dfrac{1}{n \ln n}$ diverge d'après 2..

Donc d'après (R) : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k . H_k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k . \ln k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(\ln n)$

Donc $b_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\ln(\ln n)}{\ln(H_n)}$

Mais $\ln(\ln n) = \ln\left(\dfrac{\ln n}{H_n}\right) + \ln H_n$

donc $\dfrac{\ln(\ln n)}{\ln H_n} = 1 + \dfrac{\ln\left(\frac{\ln n}{H_n}\right)}{\ln H_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 + \dfrac{0}{+\infty} = 1$

Donc $\boxed{b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1}$

4. (a) $\forall n \geqslant 1,\quad A_n = A_{n-1} + a_n$

donc $\dfrac{A_n}{A_{n-1}} = 1 + \dfrac{a_n}{A_{n-1}}$

Mais (a_n) est bornée et $A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ puisque $\sum a_n$ diverge et c'est une SATP.

Donc $\dfrac{a_n}{A_{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc $\boxed{A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} A_{n-1}}$

4.(b) $\ln\left(\dfrac{A_n}{A_{n-1}}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{a_n}{A_{n-1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a_n}{A_{n-1}}$

car $\dfrac{a_n}{A_{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Mais $A_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} A_n$ donc $\boxed{\ln\left(\dfrac{A_n}{A_{n-1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a_n}{A_n}}$

4.(c) $\ln\left(\dfrac{A_n}{A_{n-1}}\right) = \ln(A_n) - \ln(A_{n-1})$

Mais $A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\ln(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Par le théorème de dualité suite-séries la série $\sum \ln\left(\dfrac{A_n}{A_{n-1}}\right)$ diverge

Donc par comparaison de SATP : $\boxed{\text{la série } \sum \dfrac{a_n}{A_n} \text{ diverge}}$

4.(d) En appliquant (R) :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{A_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=2}^{n} \ln \frac{A_k}{A_{k-1}} = \ln A_n - \ln A_1$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(A_n)$$

Donc $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ et donc $\boxed{b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$

5. Si (u_n) est bornée

On pose $a_1 = 1$ et $\forall n \geq 2$, $a_n = u_n$

Alors (a_n) vérifie (P) donc $\sum \frac{a_n}{A_n}$ diverge.

Comme $A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ on a $\frac{a_n}{A_n} \underset{n\to+\infty}{=} o(a_n)$

ie $\frac{a_n}{A_n} \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$

Donc si on pose $v_n = \frac{a_n}{A_n}$ alors la suite (v_n) convient.

Si (u_n) n'est pas bornée alors $u_n \geq 1$ apcr.

On pose $a_1 = 1$ et $\forall n \geq 2$ $a_n = \min(1, u_n)$.

La suite (a_n) est stationnaire égale à 1 apcr.

Donc la série $\sum a_n$ diverge (grossièrement).

(a_n) vérifie (P) et $a_n \underset{n \to +\infty}{=} o(u_n)$

Donc si on pose $v_n = a_n$ alors (v_n) convient.