Correction khâsse 2019

EXERCICE 1

1. $\boxed{\Longrightarrow}$ si M nilpotente d'indice p alors p est le plus petit entier naturel k tq $M^k = O_n$.

Donc $M^p = O_n$ et $\forall k \leq p-1$, $M^k \neq O_n$.

Donc $M^p = O_n$ et $M^{p-1} \neq O_n$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ si $M^p = O_n$ et $M^{p-1} \neq O_n$.

Alors $\forall k \leq p-1$, $M^k \neq O_n$ (par contraposée de $M^k = O_n \Rightarrow M^{p-1} = O_n$)

Donc p est le plus petit entier naturel k tel que $M^k = O_n$

donc M est nilpotente d'indice p.

2. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente d'indice 1

alors $\underline{M = O_n}$. La réciproque est immédiate.

3. Si C_1, C_2, C_3 sont les colonnes de A alors

$C_2 = 3C_1$ et $C_3 = -7C_1$ et $C_1 \neq O_{3,1}$

Donc $rg(A) = \dim(\text{Vect}(C_1, C_2, C_3)) = \dim(\text{Vect}(C_1)) = \boxed{1}$

On a $A^2 = O_3$ et $A \neq O_3$ donc $\underline{A \text{ est nilpotente d'indice } 2}$.

3.(b) On a $A^2 = O_3$ donc $\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $A^2X = O_{3,1}$

donc $\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $AX \in \text{Ker}(A)$

Donc $\boxed{\text{Im}(A) \subseteq \text{Ker}(A)}$

$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \mathrm{Vect}(C_1)$

Comme $C_1 \neq O_{3,1}$ alors C_1 est une base de $\mathrm{Im}(A)$

Comme $C_2 = 3C_1$ et $C_3 = -7C_1$

on a $A\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix}7\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Comme $\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}7\\0\\1\end{pmatrix}$ sont non colinéaires, ils engendrent un plan inclus dans $\mathrm{Ker}(A)$.

Mais d'après le théorème du rang : $\dim(\mathrm{Ker}\,A) = 3 - \mathrm{rg}\,A = 2$.

Donc $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

Donc $\left(\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{Ker}(A)$.

3.(c) On a $u(1,0,0) = (1,2,1)$

et $u^2 = 0$ donc $(1,2,1) \in \mathrm{Ker}\,u$

On pose donc $\vec{\varepsilon_1} = (1,0,0)$

$\vec{\varepsilon_2} = (1,2,1) = u(\vec{\varepsilon_1}) \in \mathrm{Ker}\,u$

$\vec{\varepsilon_3} = (3,-1,0) \in \mathrm{Ker}\,u$

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\0 & 2 & -1\\0 & 1 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & -1\\1 & 0\end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

donc $\mathcal{B} = (\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3})$ est une base de $\mathbb{C}^3$.

Alors $\boxed{\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

3.(d) On pose $P = P_{\mathcal{B}_{can} \to \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

D'après la formule de changement de base on a :

$$\boxed{A = P \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times P^{-1}}$$

4.(a) Comme M est nilpotente d'indice p on a $M^{p-1} \neq 0_n$

donc $u^{p-1} \neq 0$

donc $\boxed{\exists x_0 \in E ;\ u^{p-1}(x_0) \neq 0}$

4.(b) Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k . u^k(x_0) = 0$

Si on compose par u^{p-1} :

$$\alpha_0 u^{p-1}(x_0) + \underbrace{\alpha_1 u^p(x_0) + \dots + \alpha_{p-1} u^{2p-2}(x_0)}_{=0 \text{ car } \forall k \geq p,\ u^k = 0} = u^{p-1}(0) = 0$$

Donc $\alpha_0 . u^{p-1}(x_0) = 0$

Comme $u^{p-1}(x_0) \neq 0$ on a $\alpha_0 = 0$

On le réinjecte :

$$\alpha_1 u(x_0) + \alpha_2 u^2(x_0) + \cdots + \alpha_{p-1} u^{p-1}(x_0) = 0$$

On compose par u^{p-2} :

$$\alpha_1 u^{p-1}(x_0) + \underbrace{\alpha_2 u^p(x_0) + \cdots + \alpha_{p-1} u^{2p-3}(x_0)}_{=0} = 0$$

Donc $\alpha_1 u^{p-1}(x_0) = 0$ et donc $\alpha_1 = 0$.

En réitérant on arrive à $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{p-1} = 0$

Donc la famille $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ est libre.

Elle est formée de p vecteurs de $\mathbb{C}^2$ et $\dim(\mathbb{C}^2) = 2$.

On a donc $p \leq 2$. Mais $p \geq 2$. Donc $p = 2$

et donc $u^2 = 0$ et $u \neq 0$.

4.(c) Comme $u^2 = 0$ on a $\operatorname{Im}(u) \subseteq \operatorname{Ker}(u)$

Comme $u \neq 0$ on a $\operatorname{rg} u \geq 1$.

D'après le th du rang : $2 = \dim(\operatorname{Ker} u) + \operatorname{rg} u$

Comme $u^2 = 0$, u n'est pas bijectif et donc $\operatorname{rg} u \neq 2$

Ainsi $\operatorname{rg} u = 1$ et donc $\dim(\operatorname{Ker} u) = 1 = \dim(\operatorname{Im} u)$

Donc $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u$

4.(d) D'après 4.(b) la famille $(x_0, u(x_0))$ est libre dans $\mathbb{C}^2$ donc est une base de $\mathbb{C}^2$.

Comme $u^2(x_0) = 0$ la matrice de u dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.(e) C'est la formule de changement de base.

5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente.

Si elle est d'indice 1 alors $M = 0_n$ donc

$$Tr(M) = det(M) = 0$$

si elle est d'indice 2 alors $\exists P \in Gl_2(\mathbb{C})$ tq

$$M = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$$

Mais alors $Tr(M) = Tr\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$$det(M) = det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Réciproquement si $Tr(M) = 0$ et $det(M) = 0$ alors

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ tel que $\begin{cases} a + d = 0 \\ ad - bc = 0 \end{cases}$

donc $\begin{cases} a = -d \\ bc = -d^2 = -a^2 \end{cases}$

Alors $M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = 0_2$

Donc M est nilpotente.

Ainsi: $\boxed{M \text{ est nilpotente} \iff Tr(M) = det(M) = 0}$

6. Supposons qu'il existe $R \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que :

$$R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $R^4 = O_2$ donc R est nilpotente.

D'après 4.(b) on a $R = O_2$ ou $R^2 = O_2$.

Les deux sont fausses.

Donc il n'existe pas $R \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

7.(a) $u^2 = 0$ donne $\underline{\mathrm{Im}(u) \subseteq \mathrm{Ker}(u)}$

Donc $\dim(\mathrm{Im}\, u) = \mathrm{rg}\, u \leqslant \dim(\mathrm{Ker}\, u)$

D'après le théorème du rang : $\dim(\mathrm{Ker}\, u) + \mathrm{rg}\, u = n$.

Donc $2\,\mathrm{rg}\, u \leq n$ ie $\underline{2r \leq n}$

7.(b) $\mathrm{rg}\, u = r$. Il existe donc $(v_1, \dots, v_r)$ base de $\mathrm{Im}\, u$.

Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $v_k \in \mathrm{Im}\, u$ donc $\exists e_k \in \mathbb{C}^n$; $v_k = u(e_k)$

Alors $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$.

7.(c) Comme $\mathrm{Im}(u) \subseteq \mathrm{Ker}\, u$, cette famille est libre dans $\mathrm{Ker}\, u$. Comme $\dim(\mathrm{Ker}\, u) = n - r$ on peut la compléter avec des vecteurs $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2r}$ de $\mathbb{C}^n$ pour obtenir $(u(e_1), \dots, u(e_r), \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2r})$ base de $\mathrm{Ker}\, u$

7.(d) Soit $\lambda_1, \mu_1, \dots, \lambda_r, \mu_r, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-2r}$ des réels tels que :

$$\lambda_1 e_1 + \mu_1 u(e_1) + \dots + \lambda_r e_r + \mu_r u(e_r) + \alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_{n-2r} V_{n-2r} = 0$$

On compose par u et on utilise $u^2 = 0$

$$\lambda_1 u(e_1) + \dots + \lambda_r u(e_r) = 0$$

car $u(V_1) = \dots = u(V_{n-2r}) = 0$

Comme $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est libre : $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$

Donc $\mu_1 u(e_1) + \dots + \mu_r u(e_r) + \alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_{n-2r} V_{n-2r} = 0$

D'après 7.(c) on a $\mu_1 = \dots = \mu_r = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-2r} = 0$

Donc B est libre. Comme elle est formée de n vecteurs de $\mathbb{C}^n$ et comme $\dim(\mathbb{C}^n) = n$ alors B est une base de $\mathbb{C}^n$.

$$\underset{B}{\mathrm{Mat}}(u) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix} & & & & \\ & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix} & & & (0) \\ & & \ddots & & \\ & & & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix} & \\ & (0) & & & (0) \end{pmatrix}$$

EXERCICE 2

1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

$$Tr(\lambda A + B) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda A + B)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda A_{i,i} + B_{i,i})$$

$$= \lambda . \sum_{i=1}^{n} A_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} B_{i,i} = \lambda . Tr(A) + Tr(B)$$

Donc Tr est une forme linéaire

Comme $Im(Tr) \subseteq \mathbb{R}$ on a $rg(Tr) = 0$ ou 1

donc $Im(Tr) = \{0\}$ ou $\mathbb{R}$

Il est clair que Tr n'est pas constante nulle donc

$rg(Tr) = 1$ et d'après le théorème du rang :

$$\boxed{dim(Ker(Tr)) = n^2 - 1}$$

2. $$Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} \times B_{j,i} \right)$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} A_{i,j} \times B_{j,i} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} B_{j,i} \times A_{i,j} \right) \quad \text{car } \times \text{ commute dans } \mathbb{R}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (BA)_{j,j} = Tr(BA)$$

$$Tr(A^T) = \sum_{i=1}^{n} (A^T)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} A_{i,i} = \underline{Tr(A)}$$

3. $$Tr(A^T B) = \sum_{i=1}^{n} (A^T \times B)_{i,i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} (A^T)_{i,j} \times B_{j,i} \right)$$

$$= \underline{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{j,i} \times B_{j,i} \right)}$$

4. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(A, \quad \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3$.

- $Tr(A^T \times B) \in \mathbb{R}$ donc φ est une <u>forme</u>.
- $\langle \lambda A + B, C \rangle = Tr\left((\lambda A + B)^T \times C \right) = Tr\left((\lambda A^T + B^T) \times C \right)$

$$= Tr(\lambda A^T \times C + B^T \times C)$$

$$\underset{1.}{=} \lambda . Tr(A^T \times C) + Tr(B^T \times C) = \lambda . \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle$$

donc φ est <u>linéaire à gauche</u>

- $\langle B, A \rangle = Tr(B^T \times A) \underset{2.}{=} Tr\left((B^T \times A)^T \right)$

$$= Tr(A^T \times B) = \langle A, B \rangle$$

donc φ est <u>symétrique</u> et <u>bilinéaire</u>.

- $\langle A, A \rangle = \text{Tr}(A^T \times A) \underset{3.}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{j,i}^2 \right) \geqslant 0$

car A matrice réelle

donc φ est positive

- $\langle A, A \rangle = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{j,i}^2 \right) = 0$

$\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ A_{j,i}^2 = 0$

$\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ A_{j,i} = 0$

$\iff A = 0_n$

car une somme de termes positifs est nulle
ssi tous les termes sont nuls

donc φ est une forme définie

Ainsi φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive

Donc φ est un produit scalaire.

5. $\|A\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2 + (-2)^2 + 0^2 + (-1)^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2}$

$= \boxed{\sqrt{14}}$

$\langle A, J \rangle = 1 - 1 + 2 - 2 + 0 - 1 + 1 + 1 + 1 = 2 \neq 0$ donc $\boxed{A \not\perp J}$

6. On note $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si $i \neq k$ et $j \neq l$ alors :

$$\langle E_{i,j}, E_{k,l} \rangle = 0 \times 1 + 1 \times 0 = 0$$

(le 1 de la matrice $E_{i,j}$ n'est pas à la même place que celui de la matrice $E_{k,l}$)

Et $\langle E_{i,j}, E_{i,j} \rangle = 1^2 = 1$

Donc oui, la base canonique est orthonormée.

7. $\mathbb{H} = \{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; Tr(A) = 0 \}$

$= \{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; \langle J, A \rangle = 0 \}$

où J est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où tous les coefficients sont égaux à 1.

Donc $\mathbb{H} = (Vect(J))^{\perp}$

Et comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie :

$$\mathbb{H}^{\perp} = (Vect(J)^{\perp})^{\perp} = \boxed{Vect(J)}$$