Correction Analyse

Ex2

1 a) On lance n fois une pièce.
Les lancers sont indépendants.
On compte le nbre de "piles" obtenus au cours de ces n lancers.
On note p la proba d'avoir Pile sur 1 lancer.
Ainsi $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$
Comme $n=3$ et $p=2/3$, on a $X \hookrightarrow \mathcal{B}(3, 2/3)$.
le joueur est vainqueur ssi $(X=0)$ ou $(X=2)$, càd $A = (X=0) \cup (X=2)$
disjoints

Donc
$$\begin{aligned} p(A) &= p(X=0) + p(X=2) \\ &= \binom{3}{0} p^0 (1-p)^3 + \binom{3}{2} p^2 (1-p)^1 \\ &= \left(\tfrac{1}{3}\right)^3 + 3 \times \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 \times \tfrac{1}{3} \\ &= \frac{1}{27} + \frac{12}{27} = \frac{13}{27} \end{aligned}$$

<u>Bilan</u> : $p(A) = 27$

b). Si on a 0 pile : $G = 0$
Si on a 1 pile, $G = -10$
Si on a 2 pile $G = 20$
Si on a 3 piles : $G = -30$

donc $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$

Donc

g_i	-30	-10	0	20
p_i	$\frac{8}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{12}{27}$

$$p(G=-30) = p(X=3) = \binom{3}{3} p^3 (1-p)^0 = \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$
$$p(G=-10) = p(X=1) = \binom{3}{1} p^1 (1-p)^2 = 3 \times \tfrac{2}{3} \times \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 = \frac{6}{27}$$
$$p(G=0) = p(X=0) = \binom{3}{0} p^0 (1-p)^3 = \left(\tfrac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$
$$p(G=20) = p(X=2) = \binom{3}{2} p^2 (1-p)^1 = 3 \times \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 \times \tfrac{1}{3} = \frac{12}{27}$$

D'où $E(G) = -30 \times \frac{8}{27} - 10 \times \frac{6}{27} + 0 \times \frac{1}{27} + 20 \times \frac{12}{27}$

$$= -\frac{240}{27} - \frac{60}{27} + \frac{240}{27} = -\frac{60}{27} = -\frac{20}{9}.$$

<u>Bilan</u> : $E(G) = -\frac{20}{9} < 0$ donc le jeu n'est pas favorable au jeu.

2). a). On a $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$.

On a $p(Y=1) = p(A)$ car $(Y=1)$ signifie que X pair
c.à.d que le joueur gagne,
donc A est vérifié.

D'où $p(Y=-1) = 1 - p(A)$

Ainsi

y_i	-1	1
p_i	$1-p(A)$	$p(A)$

c.à.d $E(Y) = -1(1-p(A)) + p(A)$
$= 2p(A) - 1$.

<u>Bilan</u> : $E(Y) = 2p(A) - 1$.

b). On a $E(Y) = E((-1)^X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k p(X=k)$ grâce au th. du transfert.

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-p)^k (1-p)^{n-k} = (1-2p)^n$$ grâce au binôme de Newton

<u>Bilan</u> : $E(Y) = (1-2p)^n$.

c). On a donc $2p(A) - 1 = (1-2p)^n$

c.à.d $p(A) = \frac{1}{2} + \frac{(1-2p)^n}{2}$.

Ainsi $p(A) \geq 1/2 \iff (1-2p)^n \geq 0$

$$\iff \begin{cases} n \text{ pair} \\ \text{ou} \\ 1-2p \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} n \text{ pair} \\ \text{ou} \\ p \leq 1/2. \end{cases}$$

<u>Bilan</u> : $p(A) \geq 1/2 \iff \begin{cases} n \text{ pair} \\ \text{ou} \\ p \leq 1/2. \end{cases}$

3 a). G représente le gain.

* si X pair : $\exists k \in \mathbb{N} / \ X = 2k$.

alors G est positif et $G = 10 \times 2k$.

c.à.d $G = 10X \ = (-1)^X 10X$

* si X impair, $\exists k \in \mathbb{N} / \ X = 2k+1$

donc G négatif et $G = -10 \times (2k+1)$

$= -10X = (-1)^X 10X$.

Bilan : $\underline{G = (-1)^X 10X}$

b). Soit $k \in \mathbb{N}^* / \ k \leq n$.

On a $k\binom{n}{k} = k \times \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \dfrac{n \times (n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}$

Bilan : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

c) On a $E(G) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k 10k \ p(X=k)$ grâce à 3a) et la formule du transfert.

$= 10\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 10 \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$= 10 \sum_{k=0}^{n} n \binom{n-1}{k-1} (-p)^k (1-p)^{n-k}$

$= 10n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-p)^{k+1} (1-p)^{n-1-k}$

$= -10np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-p)^k (1-p)^{n-1-k} = -10np\,(1-2p)^{n-1}$.

Bilan. $E(G) = -10np\,(1-2p)^{n-1}$

d) On a donc $\begin{cases} p(A) \geq 1/2 \\ E(G) \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} n \text{ pair ou } p \leq 1/2 & \text{grâce à 2c)} \\ -10np(1-2p)^{n-1} \leq 0 & \text{grâce à 3c)} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} n \text{ pair ou } p \leq 1/2 \\ (1-2p)^{n-1} \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} n \text{ pair ou } p \leq 1/2 \\ n-1 \text{ pair ou } 1-2p \geq 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} n \text{ pair ou } p \leq 1/2 \\ n \text{ impair ou } p \leq 1/2 \end{cases} \iff \boxed{p \leq 1/2}$.

Exercice 3

(2')

1) Soit $t \in [0,1]$.

On a $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k = \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)}$ car $-t \neq 1$.

$$= \frac{1-(-1)^n t^n}{1+t} = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}.$$

D'où $\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k + (-1)^n \frac{t^n}{1+t}$.

2) Soit $x \geq 0$

Alors $t^x \geq 0$ et $\frac{t^x}{1+t} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^{x+k} + (-1)^n \frac{t^{x+n}}{1+t}$.

D'où $\int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 t^{x+k} dt + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{x+n}}{1+t} dt$.

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\frac{t^{x+k+1}}{x+k+1}\right]_0^1 + R_n(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{x+k+1} + R_n(x) = S_n(x) + R_n(x)$$

Bilan: $\int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt = S_n(x) + R_n(x)$

3) Mq $R_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

On a $|R_n(x)| = \left|(-1)^n \int_0^1 \frac{t^{x+n}}{1+t} dt\right| \leq \int_0^1 \frac{|t|^{x+n}}{|1+t|} dt = \int_0^1 \frac{t^{x+n}}{1+t} dt$

$\leq \int_0^1 t^{x+n} dt$ car $1+t \geq 1$. $\forall t \in [0,1]$

càd $|R_n(x)| \leq \left[\frac{t^{x+n+1}}{x+n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{x+n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

D'où $R_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et ainsi g à 2), $S_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$

4) Notons $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{1+t} dt$

Posons $u = \sqrt{t}$ alors $du = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2u} dt$.

D'où $I = \int_0^1 \frac{u}{1+u^2} \times 2u\,du = \int_0^1 \frac{2u^2}{1+u^2}\,du = \int_0^1 2\left(\frac{1+u^2-1}{1+u^2}\right) du$

$= \int_0^1 \left(2 - \frac{2}{1+u^2}\right) du = \left[2u - 2\arctan u\right]_0^1 = 2 - 2\times \pi/4 = 2 - \pi/2.$

Bilan: $\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{1+t}\,dt = 2 - \pi/2$

Pr $x = 1/2$, $S_n(1/2) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{1/2+k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} 2\frac{(-1)^k}{2k+3} = 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2(k+1)+1}$

$\underset{k'=k+1}{=} 2\sum_{k'=1}^{n} \frac{(-1)^{k'-1}}{2k'+1} = -2\sum_{k'=1}^{n} \frac{(-1)^{k'}}{2k'+1} = -2\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \frac{1}{1}\right).$

D'où $\frac{1}{2}S_n(\frac{1}{2}) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} + 1.$

D'où $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{2}S_n(1/2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{1+t}\,dt$ ǧ à 3.

càd $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - \frac{(2-\pi/2)}{2} = \pi/4.$

Bilan: $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi/4$

5). ǧ à 3), $\lim_{n\to+\infty} S_n(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = \left[\ln(1+t)\right]_0^1 = \ln 2.$

càd $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2$ d'où $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2$

Or $(-1)^{k+1} = (-1)^{k-1}$

D'où $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2.$

6a). On a $S_n(1/3) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{1/3+k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} 3\frac{(-1)^k}{3k+4}$

Ainsi $\frac{1}{3}S_n(\frac{1}{3}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{3k+4}.$

D'où $1 - \frac{1}{3}S_n(\frac{1}{3}) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{3k+4} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{3k+4}$

$$\underset{k'=k+1}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{3k'+1} \qquad \text{Or } \frac{(-1)^0}{3\times 0+1} = 1 \text{ donc}$$

$$1 - \frac{1}{3} S_n\left(\frac{1}{3}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{3k+1} = U_n$$

Bilan : $U_n = 1 - \frac{1}{3} S_n\left(\frac{1}{3}\right)$

b). Soit $u \in [0,1]$ On a $\frac{1}{u+1} - \frac{1}{2} \times \frac{2u-1}{u^2-u+1} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{u^2-u+1} = \frac{1}{u+1} + \frac{-\frac{1}{2}(2u-1) + 3/2}{u^2-u+1}$

$$= \frac{1}{u+1} + \frac{-u+2}{u^2-u+1}$$

$$= \frac{u^2-u+1 + (u+1)(2-u)}{(u+1)(u^2-u+1)} = \frac{u^2-u+1-u^2+u+2}{(u+1)(u^2-u+1)} = \frac{3}{(u+1)(u^2-u+1)}$$

Or $(u+1)(u^2-u+1) = u^3+1$

D'où $\frac{3}{u^3+1} = \frac{1}{u+1} - \frac{1}{2}\frac{2u-1}{u^2-u+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{u^2-u+1}$

c). Posons $u = t^{1/3}$ alors $du = \frac{1}{3} t^{-2/3}\, dt = \frac{1}{3t^{2/3}} dt = \frac{1}{3u^2} dt$.

Donc $\int_0^1 \frac{t^{1/3}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{u \times 3u^2 du}{1+u^3}$

$$= \int_0^1 \frac{3u^3}{1+u^3} du = \int_0^1 \frac{3(u^3+1) - 3}{1+u^3} du$$

$$= \int_0^1 \left(3 - \frac{3}{1+u^3}\right) du = 3 - \int_0^1 \frac{3}{1+u^3} du$$

$$\underset{b)}{=} 3 - \int_0^1 \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{2}\frac{2u-1}{u^2-u+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{u^2-u+1}\right) du$$

$$= 3 - \left[\ln(u+1) - \frac{1}{2}\ln(u^2-u+1)\right]_0^1 - \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{u^2-u+1} du$$

$$= 3 - \ln 2 + \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{(u-1/2)^2 + 3/4} du = 3 - \ln 2 - \frac{3}{2} \times \frac{1}{3/4}\int_0^1 \frac{1}{\frac{4}{3}(u-1/2)^2+1} du$$

$$= 3 - \ln 2 - 2\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(u-1/2)\right)^2+1} du = 3 - \ln 2 - \frac{2}{2/\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{2/\sqrt{3}}{\left(2/\sqrt{3}(u-1/2)\right)^2+1} du$$

$$= 3 - \ln 2 - \sqrt{3}\left[\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(u-\tfrac{1}{2}\right)\right)\right]_0^1$$

$$= 3 - \ln 2 - \sqrt{3}\left[\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

$$= 3 - \ln 2 - 2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Or $\tan \pi/6 = \dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2} = 1/\sqrt{3}$.

D'où $\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pi/6$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{1/3}}{1+t}\,dt = 3 - \ln 2 - \sqrt{3}\,\frac{\pi}{3}$.

d). On a $S_n\left(\frac{1}{3}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{1/3}}{1+t}\,dt$ ĝ à 3)

càd $U_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 - \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{1/3}}{1+t}\,dt$ ĝ à 6a)

D'où $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} U_n = 1 - \frac{1}{3}\left(3 - \ln 2 \ \sqrt{3}\,\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\ln 2}{3} + \sqrt{3}\,\frac{\pi}{9}$.

<u>Bilan</u>: $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} U_n = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\sqrt{3}\pi}{9} = \frac{3\ln 2 + \sqrt{3}\pi}{9}$