PCSI 1 - DEVOIR MAISON N ° 13 **Année scolaire 2018-2019**
A rendre le 11/03/19

PROBLEME : Polynômes de Legendre [1]

Dans ce problème, on étudie la suite $(L_n)_{n\geq 0}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$, définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_n = (X^2-1)^n \quad \text{et} \quad L_n = \frac{1}{2^n n!}U_n^{(n)}$$

On identifiera dans tout le problème polynômes et fonctions polynomiales.

1. Déterminer L_0, L_1 et L_2.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que L_n est de degré n et préciser son coefficient dominant.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, comparer les polynômes $L_n(-X)$ et $L_n(X)$.
4. **Racines de L_n.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, déterminer les valeurs de $U_n^{(k)}(-1)$ et $U_n^{(k)}(1)$.
   (b) À l'aide du théorème de Rolle montrer par récurrence finie sur $k \in [\![0, n-1]\!]$ que $U_n^{(k)}$ admet au moins k racines distinctes dans l'intervalle $]-1, 1[$.
   (c) Conclure que L_n est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$ et que toutes ses racines sont dans l'intervalle $]-1, 1[$.
5. **Une expression de L_n.**
   (a) À l'aide de la formule de Leibnitz et en remarquant que $U_n = (X-1)^n \times (X+1)^n$, montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_n(X) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (X+1)^{n-k}(X-1)^k$$
   (b) En déduire la valeur de $L_n(1)$ et de $L_n(-1)$.
   À l'aide du terme dominant de L_n donner la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$.
6. **Formules de récurrence.**
   (a) En remarquant que $U_{n+1} = (X-1)^{n+1} \times (X+1)^{n+1}$, montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U'_{n+1} = 2.(n+1).X.U_n$$
   (b) En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U''_{n+1} = 2.(n+1).(2n+1).U_n + 4.n.(n+1).U_{n-1}$$
   (c) En dérivant n fois la formule du (a) et $(n-1)$ fois la formule du (b), montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (n+1).L_{n+1} = (2n+1).X.L_n - n.L_{n-1}$$
7. **Une équation différentielle.**
   À partir de la formule de Leibnitz, effectuer le calcul de $U_{n+1}^{(n+2)}$ en utilisant 6.(a) puis le refaire en remarquant que $U_{n+1} = (X^2-1).U_n$. En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1-X^2)L''_n - 2XL'_n + n(n+1)L_n = 0$$
8. **Une autre expression de L_n.**
   En appliquant la formule du binôme de Newton au polynôme $U_n = (X^2-1)^n$, puis en dérivant n fois la formule obtenue, montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_n(X) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n-2k}{n}X^{n-2k}$$
   En déduire la valeur $L_n(0)$ suivant la parité de n.

1. Adrien Marie Legendre (1752-1833)