PCSI 1 - DEVOIR MAISON N$^\circ$ 16 **Année scolaire 2018-2019**
A rendre le 02/05/19

EXERCICE 1 : Une fonction définie par une intégrale

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $t + \arctan t = 0$.
2. On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t + \arctan t}$.
   (a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^*$.
   (b) Etudier la parité de f.
   (c) Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_*^+$ et exprimer $f'(x)$ pour $x > 0$.
   (d) Dresser le tableau de variations de f.
3. On étudie le comportement de f en $+\infty$.
   (a) Etablir que pour tout $x > 0$:
   $$\left| f(x) - \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} \right| \leq \frac{\pi}{2} \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$
   (b) En déduire l'existence et le calcul de la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

EXERCICE 2 : Une suite définie par une intégrale

On considère la suite réelle suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos(x)^n}\,\mathrm{d}x$$

1. Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie. Calculer I_0 et I_2.
2. En posant $t = \sin x$, déterminer la valeur de I_1.
3. Déteminer le sens de variations de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n \geq \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^n(x)} \geq \frac{\pi}{12}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$$
   En déduire le comportement de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $n \to +\infty$.
5. Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \frac{(\sqrt{2})^n}{n+1} + \frac{n}{n+1} I_n$$

EXERCICE 3 : Une application linéaire

Soit n un entier naturel. On considère l'application :

$$L_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & XP''(X) + (X-4)P'(X) - 3P(X) \end{array}$$

1. **Propriétés élémentaires de L_n**
   (a) Montrer que L_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Indication : ne pas oublier de montrer que L_n est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est non nul et de degré différent de 3, vérifier que le degré du polynôme $L_n(P)$ est égal au degré de P.
   En déduire que si un polynôme non nul appartient à $\operatorname{Ker} L_n$ alors il est de degré 3.
   (c) Montrer que si $n \geq 3$, $\operatorname{Ker} L_n$ est la droite vectorielle engendrée par le polynôme $R_0(X) = X^3 - 6X^2 + 18X - 24$: $\operatorname{Ker}(L_n) = \operatorname{Vect}(R_0)$.
   Avec le théorème du rang, en déduire la dimension de $\operatorname{Im}(L_n)$.
   (d) Montrer que L_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si $n \leq 2$.
2. **Un exemple : n = 5**
   (a) On définit les polynômes $S_1 = 1$, $S_2 = X$, $S_3 = X^2$, $S_4 = X^4 - 3X^3$ et $S_5 = X^5$. Montrer qu'ils forment une base de $\operatorname{Im}(L_5)$.
   Indication : commencer par déterminer l'image par L_5 de la base canonique de $\mathbb{R}_5[X]$.
   (b) Déterminer, successivement, l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_5[X]$ tels que :

$$\begin{array}{rlcl} (i) & XP''(X) + (X-4)P'(X) - 3P(X) & = & X^5 \\ (ii) & XP''(X) + (X-4)P'(X) - 3P(X) & = & X^4 \end{array}$$

   Indications : pour (i) remarquer que P est solution ssi $P - \dfrac{X^5}{2} \in \operatorname{Ker}(L_5)$ et pour (ii) remarquer que s'il existe une solution P alors $X^4 \in \operatorname{Im}(L_5)$.