PCSI 1 - DEVOIR MAISON N° 7 **Année scolaire 2018-2019**
A rendre le lundi 7 janvier 2019

EXERCICE 1 : Suites et matrices

On définit les matrices suivantes :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On considère également la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3}$$

1. **Inverse de P.**
   Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
2. **Calcul de A^n.**
   On pose $B = P^{-1}AP$.
   (a) Calculer B. En déduire B^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PB^nP^{-1}$.
   (c) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.
3. **Convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.**
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.
   (b) Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
   (c) Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 1.
4. **Calcule de u_n puis de sa limite.**
   On considère les deux suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ définie par $a_0 = 2$, $b_0 = 1$ et :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}b_n$$
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n > 0$, $b_n > 0$ et $u_n = \dfrac{a_n}{b_n}$.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Donner l'expression de X_{n+1} en fonction de A et X_n puis en déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0$$
   (c) Donner alors l'expression de u_n en fonction de n puis retrouver la valeur de sa limite.

<u>EXERCICE 2</u> : Fonctions numériques

Partie I : Caractérisation des homothéties

On veut déterminer les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} (i) & \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x+y) = g(x) + g(y) \\ (ii) & g \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ ie } \forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{t \to x} g(t) = g(x) \end{cases}$$

On se donne g une solution du problème.

1. Vérifier que $g(0) = 0$.
2. On pose $a = g(1)$. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(n) = a \times n$. Vérifier que cette formule est encore valable pour $n \in \mathbb{Z}$.
3. Etablir que : $\forall r \in \mathbb{Q}$, $g(r) = a \times r$ (*utiliser le fait que r s'écrit $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$*)
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier qu'il existe une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres rationnels qui converge vers x et en déduire que $g(x) = a \times x$.
5. En raisonnant par analyse-synthyèse, donner alors toutes les solutions du problème.

Partie II : Caractérisation des fonctions exponentielles

On veut déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} (i) & \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x)f(y) \\ (ii) & f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

On se donne f solution du problème.

1. (a) Vérifier que $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
   (b) Etablir que : ou bien f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$, ou bien f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que si f n'est pas la fonction nulle alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ et $f(0) = 1$.
2. On suppose dans cette question que f n'est pas la fonction nulle et on pose $g = \ln(f)$.
   (a) Monter que g est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Etablir que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x+y) = g(x) + g(y)$.
   (c) En déduire qu'il existe un réel $b > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = b^x$.
3. En raisonnant par analyse-synthèse, donner alors toutes les solutions du problème.