**PCSI 1 - DEVOIR MAISON N ° 9** **Année scolaire 2018-2019**
**A rendre le 11/02/19**

**<u>PROBLEME</u> : Polynômes de Tchebychev** [1]

Dans ce problème, on étudie la suite $(T_n)_{n\geq 0}$ de polynômes de $\mathbb{C}[X]$, définie par :

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

On définit aussi la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = \frac{1}{n}T_n'.$$

Pour tout nombre complexe $z$, on pose définit les fonctions cosinus et sinus hyperboliques complexes par $\operatorname{ch}(z) = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ et $\operatorname{sh}(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$.

Si $P$ est un polynôme non nul, alors $\deg(P)$ désigne son degré.

Si $x$ est un réel, on notera $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière.

On identifiera dans tout le problème polynômes et fonctions polynomiales.

1. **Préliminaires.**
   (a) Montrer que $\forall z \in \mathbb{C},\ \operatorname{ch}^2(z) - \operatorname{sh}^2(z) = 1$.
   (b) Montrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2,\ \operatorname{ch}(a + b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$.
   (c) Lorsque $x \in \mathbb{R}$ que vaut $\operatorname{ch}(ix)$ et que vaut $\operatorname{sh}(ix)$ ?
   (d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C},\ T_n(\operatorname{ch}(z)) = \operatorname{ch}(nz)$.
2. **Propriétés simples de $T_n$ et $U_n$.**
   (a) Calculer $T_0$, $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$, $T_5$ et $U_1$, $U_2$, $U_3$, $U_4$, $U_5$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : T_n \in \mathbb{R}[X]$.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : \deg(T_n) = n$. Calculer aussi le coefficient dominant de $T_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   (d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$. Que peut-on en déduire sur le polynôme $T_n$ ?
   (e) Quelles informations les trois questions précédentes donnent-elles sur le polynôme $U_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ ?
   (f) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $T_n(1)$, $T_n(-1)$ et $T_n(0)$.
3. **Calcul de $T_n(X)$ et $U_n(X)$.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R} : T_n\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta)$.
   En déduire que : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin(\theta) \times U_n\big(\cos(\theta)\big) = \sin(n\theta)$.
   (b) À l'aide de la question précédente, montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ :

$$T_n(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} \big(\cos(\theta)^2 - 1\big)^k \cos(\theta)^{n-2k}$$

1. Pafnouti Lvovitch Tchebychev (1821-1894)

(c) Conclure que

$$T_n(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (X^2-1)^k X^{n-2k}$$

(d) En procédant de même montrer que :

$$U_n(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} (X^2-1)^k X^{n-2k-1}$$

4. **Racines de $T_n$.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Résoudre l'équation $\cos(n\theta) = 0$, d'inconnu $\theta$ réel.
   Donner les solutions qui sont dans l'intervalle $]0, \pi[$.
   (b) En déduire que $T_n$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$.
   (c) Factoriser le polynôme $T_n$ dans $\mathbb{R}[X]$.
   (d) Calculer le produit des racines de $T_n$.
5. **Étude de $T_n$ sur $[-1,1]$.** Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $\forall x \in [-1,1]$, $T_n(x) = \cos\big(n \arccos(x)\big)$.
   (b) Montrer aussi que

$$\forall x \in [-1,1], \quad T_n(x) = \frac{\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n + \left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)^n}{2}$$

   (c) Montrer que : $\forall x \in [-1,1]$, $\big|T_n(x)\big| \leq 1$.
   Résoudre l'équation $\big|T_n(x)\big| = 1$ pour $x \in [-1,1]$.
6. **Étude de $U_n$ sur $[-1,1]$.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que $\forall x \in ]-1,1[$, $U_n(x) = \dfrac{\sin\big(n \arccos(x)\big)}{\sqrt{1-x^2}}$.
   (b) Montrer que : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\big|\sin(n\theta)\big| \leq n\big|\sin(\theta)\big|$.
   (c) En déduire que $\forall x \in [-1,1]$, $\big|U_n(x)\big| \leq n$.
   Résoudre l'équation $\big|U_n(x)\big| = n$ pour $x \in [-1,1]$.
7. **Étude de $T_n$ en dehors de $[-1,1]$.** Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que ch définit une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$. On note argch sa bijection réciproque. Donner l'expression de $\operatorname{argch}(y)$, pour $y \geq 1$.
   (b) Montrer que $\forall x \geq 1,\ T_n(x) = \operatorname{ch}(n \operatorname{argch}(x))$.
   (c) En déduire que :

$$\forall x \geq 1,\ T_n(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n}{2}.$$

   (d) Montrer que la formule ci-dessus reste valable pour $x \leq -1$.
   (e) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, si $|x| \geq 1$ alors $|T_n(x)| \geq 1$.

*Les polynômes $T_n$ sont appelés polynômes de Tchebychev de première espèce et les polynomes $U_n$ sont appelés polynômes de Tchebychev de seconde espèce.*