<u>PROBLEME</u> : Autour des fonctions continues sur un intervalle

Darboux[1] *systématisera dans son mémoire de* 1875 *la démarche amorcée dans sa correspondance où il expose au coup par coup [...] les propriétés implicites de la pratique commune de la notion de fonction continue.*
Il cherche à dégrossir le concept de fonction continue et à le dépouiller de tout ce qui n'est pas strictement induit par sa définition, et que l'« usage », l'activité mathématique passée lui avait donc conféré. Cauchy[2] *avait cassé le cadre fonction continue/fonction analytique. Darboux cherche à casser les assimilations suivantes : fonction continue/fonction monotone, fonction continue entre a et b/fonction qui passe par toutes les valeurs intermédiaires entre* $f(a)$ *et* $f(b)$, *fonction continue/fonction dérivable.*
En réduisant à sa juste mesure la classe des fonctions continues, Darboux donne une réalité, une épaisseur aux classes de fonctions qui ne le sont pas. Il libère le concept de fonction du carcan de la continuité.

On se propose dans ce qui suit de mettre en lumière quelques points évoqués par le texte précédent.

Partie I. Propriété des valeurs intermédaires

Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle I d'intérieur non vide. On dit que f possède la propriété des valeurs intermédiaires si, pour tout $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$, et pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$.
Cette propriété sera notée $\mathcal{P}$ dans la suite.

1. **Démonstration du théorème des valeurs intermédiaires.**

   On se propose dans ce qui suit de démontrer le théorème suivant (théorème des valeurs intermédiaires) :

   si f est une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$, alors f possède la propriété $\mathcal{P}$

   Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$. La conclusion étant immédiate si $f(a) = f(b)$, on peut toujours supposer (quitte à remplacer f par $-f$) que $f(a) < f(b)$; dans la suite on supposera cette hypothèse vérifiée.

   (a) Soit E une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Soit c sa borne supérieure.
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le réel $c - \dfrac{1}{n}$ est-il un majorant de E ?
   En déduire qu'il existe $x_n \in E$ tel que $c - \dfrac{1}{n} \leq x_n \leq c$.
   Conclure qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E qui converge vers c.

   Dans la suite, on fixe λ réel tel que $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$ et on pose $E = \big\{x \in [a, b];\ f(x) \leq \lambda\big\}$.

   (b) Montrer que E est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$.

   On note c la borne supérieure de E.

   (c) Montrer que $c \in [a, b]$.

   (d) En utilisant la question I.1.(a) montrer que $f(c) \leq \lambda$.

1. Gaston Darboux $(1842 - 1917)$
2. Augustin-Louis Cauchy $(1789 - 1857)$

(e) Si $c < b$, montrer que pour n assez grand, on a $c + \dfrac{1}{n} \in]c, b[$ et $f\left(c + \dfrac{1}{n}\right) > \lambda$.
En déduire que $f(c) \geq \lambda$. Ce résultat est-il vrai si $c = b$?

(f) Conclure.

2. **Application.** Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $c_n \in \left[0, 1 - \dfrac{1}{n}\right]$ tel que : $f(c_n) = f\left(c_n + \dfrac{1}{n}\right)$

Indication : on pourra considérer la fonction f_n définie sur $\left[0, 1 - \dfrac{1}{n}\right]$ par

$f_n(x) = f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - f(x)$ *et écrire* $f(1) - f(0)$ *en fonction de* f_n.

(b) Montrer que si on remplace $\dfrac{1}{n}$ par un réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que $\dfrac{1}{\alpha} \notin \mathbb{N}$, le résultat précédent n'est plus vrai. On pourra considérer la fonction f définie sur $[0, 1]$ par :

$$f(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{\alpha}\right) - x\left[\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right]$$

Partie II. Réciproque du théorème des valeurs intermédiaires

Bien avant Darboux, [...] Bolzano[3] avait critiqué comme incorrect l'acceptation du concept de continuité d'une fonction dans le sens où la propriété des valeurs intermédiaires est vérifiée par la fonction. Mais Lebesgue[4] note dans ses leçons sur l'agrégation qu'« on avait pris en France l'habitude de définir une fonction continue celle qui ne peut passer d'une valeur à l'autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires, et l'on considérait cette définition comme équivalente à celle de Cauchy. Darboux, qui construisait dans son "Mémoire" des fonctions dérivées non continues au sens de Cauchy, a pu montrer que les deux définitions de la continuité étaient forts différentes ».

1. **Un exemple.** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Montrer que la fonction vérifie la propriété $\mathcal{P}$ mais n'est pas continue en 0.

2. **Une classe de fonctions qui vérifient $\mathcal{P}$: un théorème de Darboux.**

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I d'intérieur non vide. On se propose de montrer que f' vérifie $\mathcal{P}$.
Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$. On suppose $f'(a) < f'(b)$ et on considère $\lambda \in]f'(a), f'(b)[$.
On considère la fonction g définie sur I par $g(x) = f(x) - \lambda x$.

(a) Justifer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = \inf\limits_{x \in [a,b]} g(x)$.

(b) Montrer que $c \neq a$ et $c \neq b$.

(c) Conclure.

(d) En déduire un exemple d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et qui ne possède pas de primitive sur $\mathbb{R}$.

3. Bernard Bolzano (1781 – 1848)
4. Henri Lebesgue (1875 – 1941)

Partie III. Théorème de continuité sur un segment

Ce théorème apparaît dans les cours de Weierstrass[5] *mais avait été démontré auparavant par Bolzano en* 1817*.*
Weierstrass étudia la fiabilité de l'analyse, dont il propose une construction logique rigoureuse. À cette époque, les démonstrations de l'analyse s'appuyaient sur des définitions ambiguës, d'où la nécessité de nouvelles définitions. Tandis que Bolzano avait développé une définition suffisamment rigoureuse des limites dès 1817 *(et peut-être même auparavant), ses travaux restèrent quasi inconnus de la communauté mathématique pendant des années, et d'autres mathématiciens éminents, comme Cauchy, n'avaient que de vagues définitions de la limite et de la continuité d'une fonction.*
Weierstrass formula une définition de la limite et de la dérivée « en (ε, δ) *», telle qu'on l'enseigne généralement aujourd'hui.*
Avec ces nouvelles définitions, il put donner des démonstrations rigoureuses de plusieurs théorèmes qui reposent sur des propriétés des nombres réels jusqu'alors tenues pour intuitives.

Rappelons son énoncé. Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et f est continue sur le segment $[a, b]$ alors :

- f est bornée sur $[a, b]$;
- f atteint son maximum global en au moins un point de $[a, b]$ et son minimum global en au moins un point de $[a, b]$.

On se propose de démontrer ce théorème.

1. **f est bornée.**

   On pose $E = \big\{c \in [a, b];\ f \text{ est bornée sur } [a, c]\big\}$.

   (a) Montrer que E est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$.

   On note β la borne supérieure de E.

   (b) Montrer que $\beta \in [a, b]$.

   (c) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que :

   $$\forall x \in [a, b] \cap [\beta - \delta, \beta + \delta], \quad \big|f(x) - f(\beta)\big| \leq 1$$

   (d) $\beta - \delta$ est-il un majorant de E ? En déduire qu'il existe $c \in E$ tel que $\beta - \delta < c \leq \beta$.

   (e) Montrer que f est bornée sur $[a, b] \cap [a, \beta + \delta]$.

   (f) Si $\beta < b$, montrer qu'il existerait $c' \in E$ tel que $c' > \beta$.

   (g) Conclure.

2. **f atteint ses bornes.**

   On pose $\mu = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$ et on suppose par l'absurde que $\forall x \in [a, b],\ f(x) < \mu$.

   (a) Justifier l'existence de μ.

   (b) Montrer que pour entier naturel n non nul, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que

   $$\mu - \frac{1}{n} < f(x_n) < \mu$$

   (c) En déduire que la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{f(x) - \mu}$ est définie sur $[a, b]$ et n'est pas bornée.

   (d) Conclure.

   (e) Expliquer comment on peut en déduire que f atteint son minimum global sur $[a, b]$.

5. Karl Weierstrass (1815 – 1897)

Partie IV. Théorème de d'Alembert-Gauss

Rappelons son énoncé : si P est un polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{C}$, alors P a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

On se propose de démontrer ce théorème selon les idées de Cauchy.

On note $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X_k$ avec $a_n \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Jutifier qu'on peut poser $m = \inf \left\{ \left| P(z) \right| ; \, z \in \mathbb{C} \right\}$.

2. (a) Vérifier que pour pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\quad \left| P(z) \right| \geq |z|^n \times \left(|a_n| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |z|^{k-n} \right)$

   En déduire qu'il existe un réel $M \geq 0$, tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$|z| \geq M \quad \Longrightarrow \quad \left| P(z) \right| \geq |z|^n \frac{|a_n|}{2}$$

   (b) On pose $R = \max \left(M ; \frac{4m}{|a_n|} ; 1 \right)$. Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$|z| \geq R \quad \Longrightarrow \quad \left| P(z) \right| \geq 2m$$

Si m est une valeur prise par la fonction $z \longmapsto \left| P(z) \right|$, c'est donc sur le disque fermé :

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{C} ; |z| \leq R \right\}$$

3. Montrer que la fonction $z \longmapsto \left| P(z) \right|$ est bornée sur $\mathcal{D}$, c'est-à-dire qu'il existe un réel positif C tel que :

$$\forall z \in \mathcal{D}, \quad \left| P(z) \right| \leq C$$

On admet qu'avec des techniques similaires à celle de la partie III, on peut démontrer que la fonction $z \longmapsto \left| P(z) \right|$ atteint son minimum global m en au moins un point de $\mathcal{D}$.

On se donne donc $z_0 \in D$ tel que : $m = \left| P(z_0) \right|$.

4. Justifier qu'il existe des nombres complexes b_0, b_1, ..., b_n tels que :

$$P(X + z_0) = b_0 + b_1 X + \cdots + b_n X^n$$

   avec $|b_0| = m$. Justifier aussi qu'il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $b_j \neq 0$.

On pose dans la suite $k = \min \left\{ j \in [\![1, n]\!] \; ; \; b_j \neq 0 \right\}$. On a donc :

$$P(X + z_0) = b_0 + b_k X^k + b_{k+1} X^{k+1} + \cdots + b_n X^n$$

On se donne aussi un complexe ω tel que $\omega^k = -b_0 \times \overline{b_k}$ et on définit une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ par $f(t) = \left| P(t\omega + z_0) \right|$.

5. Montrer que si $|t|$ est assez petite et si $|t| < 1$:

$$0 \leq f(t) \leq m \big(1 - |b_k|^2 t^k \big) + |t|^{k+1} N$$

   où N est une constante (par rapport à t) non nulle et à préciser.

6. Montrer que si impose de plus que $0 \leq t \leq m \frac{|b_k|^2}{2N}$, on a : $\quad 0 \leq f(t) \leq m \left(1 - \frac{|b_k|^2}{2} t^k \right)$

7. Conclure.

Pour une historique très intéressante des preuves de ce théorème et de ses liens avec l'apparition des nombres complexes, voir https ://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_fondamental_ de_ l'algèbre