PCSI 1 - DEVOIR MAISON FACULTATIF N$^\circ$ 1 **Année scolaire 2018-2019**
A rendre le lundi 7 janvier 2019

PROBLÈME 1 : Matrices à coefficients positifs

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1. On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. I_n est la matrice identité d'ordre n et $0_{n,1}$ est la matrice colonne dont les n lignes sont nulles.

Partie I : Matrices à diagonale strictement dominante.

Soit $A = ((a_{i,j}))_{1\le i,j\le n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dira que A est une *matrice à diagonale strictement dominante* lorsqu'elle vérifie la condition :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \;, \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

1. Soit $A = ((a_{i,j}))_{1\le i,j\le n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A est à diagonale strictement dominante.
   (a) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est une matrice colonne telle que $AX = 0$. Montrer que $X = 0_{n,1}$.
   On pourra raisonner par l'absurde en supposant que $m = \max\big(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\big) > 0$ *et considérer un* $i_0 \in [\![1, n]\!]$ *tel que* $|x_{i_0}| = m$.
   (b) En déduire que A est inversible.
2. Soit $A = ((a_{i,j}))_{1\le i,j\le n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A vérifie la propriété (P) suivante :

$$(P) \quad : \quad \begin{cases} \forall i \in [\![1, n]\!] \;, \quad a_{i,i} > 0 \\ \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad i \neq j \Longrightarrow a_{i,j} \le 0 \\ \forall i \in [\![1, n]\!] \;, \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} > 0 \end{cases}$$

   (a) Montrer que A est à diagonale strictement dominante et en déduire qu'elle est inversible.
   (b) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tel que la matrice colonne AX ait tous ses coefficients positifs ou nuls.
   Montrer que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \ge 0$.
   On pourra considérer $i_0 \in [\![1, n]\!]$ *tel que* $x_{i_0} = \min\big(x_1, x_2, \ldots, x_n\big)$.
   (c) On note $b_{i,j}$ le coefficient en position (i, j) dans la matrice inverse de A :
   $A^{-1} = ((b_{i,j}))_{1\le i,j\le n}$.
   Pour $j \in [\![1, n]\!]$, que vaut le produit $A \times \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix}$?
   (d) En déduire que les coefficients de A^{-1} sont tous positifs ou nuls.
   (e) Exemple. On prend ici $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et considère pour $\alpha > 0$: $A_\alpha = A + \alpha I_3$.
   Établir que A_α vérifie la propriété (P) et calculer A_α^{-1}.

Partie II : Convergence de suites de matrices.

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note : $X_k = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$

On dit que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la suite réelle $\big(x_i^{(k)}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel x_i.

De même, pour $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si on note $M_k = \big(m_{i,j}^{(k)}\big)_{1\leq i,j\leq n}$, on dit que $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice $M = ((m_{i,j}))_{1\leq i,j\leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, la suite réelle $\big(m_{i,j}^{(k)}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel $m_{i,j}$.

1. Généralités.
   (a) Pour une matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on définit $m(X) = \max\big(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\big)$

   Montrer qu'une suite de matrices colonnes $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice colonne X si, et seulement si, $\lim\limits_{k\to+\infty} m(X_k - X) = 0$

   (b) Pour une matrice $M = ((m_{i,j}))_{1\leq i,j\leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on définit : $s(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}|\right)$

   Montrer qu'une suite de matrices $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ converge vers une matrice M si, et seulement si : $\dim_{k\to+\infty} s(M_k - M) = 0$

   (c) Montrer que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad m(MX) \leq s(M) \times m(X)$

   (d) En déduire que si une suite de matrices $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors pour toute matrice colonne X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la suite $(M_kX)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers MX dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

   (e) Réciproquement si on dispose d'une suite de matrices $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que pour toute matrice colonne X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la suite $(M_kX)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers MX dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, montrer que la suite de matrices $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (f) Montrer encore que : $\forall (M, N) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)^2, \quad s(MN) \leq s(M) \times s(N)$

   (g) Établir maintenant que : $\forall (Y, Z) \in \big(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)^2, \quad m(Y + Z) \leq m(Y) + m(Z)$
   En déduire que : $\forall (Y, Z) \in \big(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)^2, \quad \big|m(Y) - m(Z)\big| \leq m(Y - Z)$

2. Convergence de la suite des inverses.
   On considère ici une suite de matrices $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$, toutes inversibles, qui convergent vers une matrice M inversible.

   (a) Soit X une matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que :

   $$m\big(M_k^{-1}X - M^{-1}X\big) \leq s\big(M^{-1}\big) \times s(M - M_k) \times m\big(M_k^{-1}X\big)$$

   puis établir que :

   $$m\big(M_k^{-1}X\big) \times \Big[1 - s\big(M^{-1}\big) \times s(M - M_k)\Big] \leq m\big(M^{-1}X\big)$$

(b) En déduire l'existence d'un entier naturel k_0 tel que pour tout entier k supérieur à k_0 :

$$m\big(M_k^{-1}X\big) \leq 2 \times m\big(M^{-1}X\big)$$

(c) Montrer alors que la suite $\big(M_k^{-1}X\big)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $M^{-1}X$.

(d) Conclure alors que la suite de matrices $\big(M_k^{-1}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice M^{-1}.

3. Soient M une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une suite de matrices $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers M. On suppose de plus que les matrices M_k vérifient toutes la propriété (P).
Montrer que les coefficients de la matrices M^{-1} sont tous positifs ou nuls.

4. À partir de maintenant et dans toute la suite du problème, $A = ((a_{i,j}))_{1\leq i,j\leq n}$ désigne la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1,n]\!]\ , \quad a_{i,i} = 2 \\ \forall i \in [\![1,n-1]\!]\ , \quad a_{i,i+1} = -1 \\ \forall 2 \in [\![1,n]\!]\ , \quad a_{i+1,i} = -1 \end{cases}$$

et les autres coefficients sont nuls.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \vdots & \ddots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Pour toute matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on note ${}^tX$ la matrice ligne $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$.
Montrer que ${}^tXAX$ est un réel et exprimer le sous forme d'une somme de carrés.
En déduire que A est inversible.

(b) Établir que, pour tout réel α strictement positif, la matrice $A_\alpha = A + \alpha.I_n$ vérifie la propriété (P).

(c) Construire une suite de matrices vérifiant la propriété (P), qui converge vers A.

(d) En déduire que les coefficients A^{-1} sont tous positifs ou nuls.