PCSI1 - DEVOIR SURVEILLE N ° 2 **Année scolaire 2018-2019**
Samedi 15 septembre 2018

Durée du devoir : 1h00.

Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les exercices sont indépendants, on les traitera dans l'ordre souhaité.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 : Questions de cours

1. Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout n entier naturel : $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.
   Montrer que, pour tout entier naturel n : $u_n = n$.
2. Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que :
$$A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cap \overline{B} = \emptyset$$
3. Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que :
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
4. Si A et B sont deux parties d'un ensemble E, on pose :
$$A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$$
   (a) Montrer que : $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$.
   (b) Soient A, B et C trois parties de E vérifiant : $A\Delta B = A\Delta C$.
   Montrer que : $B = C$.

<u>Exercice 2</u> : Une équation fonctionnelle (= l'inconnue est une fonction)

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x)+f(y)| = |x+y| \qquad (E)$$

On rappelle à toutes fins utiles que si a et b sont deux réels :

$$|a| = |b| \iff \big(a = b \text{ ou } a = -b\big)$$

1. (a) On pose :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

Montrer que f_1 vérifie (E).

(b) On pose :

$$f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -x \end{array}$$

Montrer que f_2 vérifie (E).

2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Parmi les deux propriétés suivantes, une est vraie, laquelle ?

$$\big(\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| = |x|\big) \iff \Big(\big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x\big) \text{ ou } \big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x\big)\Big) \quad (P_1)$$

$$\big(\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| = |x|\big) \iff \Big(\forall x \in \mathbb{R},\ \big(f(x) = x \text{ ou } f(x) = -x\big)\Big) \quad (P_2)$$

On prouvera cette propriété.

3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (E).

(a) Montrer que $f(0) = 0$.

(b) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| = |x|$$

(c) i. Écrire la négation de la propriété :

$$\big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x\big) \text{ ou } \big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x\big)$$

ii. En raisonnant par l'absurde, montrer que :

$$\big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x\big) \text{ ou } \big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x\big)$$

4. En raisonnant par analyse-synthèse, donner l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (E).