PCSI1 - DEVOIR SURVEILLE N ° 2 **Année scolaire 2017-2018**
Samedi 22 septembre 2018

Durée du devoir : 1h00.

Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les exercices sont indépendants.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 : Sur les ensembles

Soient A, B et C des parties d'un ensemble E. Démontrer que :

$$\left(A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \text{ et } B \cap \overline{A} = C \cap \overline{A}\right) \Longrightarrow B = C$$

Exercice 2 : Une récurrence

Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et pour tout n entier naturel : $u_{n+3} = 7u_{n+2} - 16u_{n+1} + 12u_n$.
Montrer que, pour tout entier naturel n : $u_n = -2 \times 3^n + 2^{n+1} + 3n2^{n-1}$.

Exercice 3 : Sur les applications

Soient E un ensemble quelconque et $g : E \longrightarrow E$ une fonction *idempotente*, c'est-à-dire telle que $g \circ g = g$. On considère les prédicats suivants :

(i) g est injective ;

(ii) g est surjective ;

(iii) g est la fonction identité de E.

Montrer que $(i) \Longrightarrow (iii)$, $(iii) \Longrightarrow (ii)$ et $(ii) \Longrightarrow (i)$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 4 : Ensembles définis par récurrence

On définit des sous-ensembles de $\mathbb{N}$ par $A_1 = \emptyset$ et $B_1 = \{0\}$ et pour n entier naturel non nul :

$$A_{n+1} = \big\{x+1; x \in B_n\big\}$$
$$B_{n+1} = (A_n \cup B_n)\backslash(A_n \cap B_n)$$

Vérifier que $B_1 = B_2 = B_4 = B_8$. Quelle conjecture peut-on faire (on n'en demande pas la preuve) ?

Exercice 5 : Partitions d'un entier

Si n est un entier naturel non nul fixé, on appelle *partition* de n une écriture de la forme :

$$n = a_1 + \cdots + a_k$$

où $k \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_k$ sont des entiers naturels non nuls tels que $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$. On cherche la valeur maximale que peut prendre le produit $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_k$ en fonction de n.

1. Pour chaque $n \in \{2;3;4;5;6;7;8;9\}$ on admet que le produit maximal vaut respectivement $2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27$. Donner pour chaque $n \in \{2;3;4;5;6;7;8;9\}$ les partitions qui réalisant le produit maximal.
2. On suppose $n \geq 5$ et on se donne une partition **maximale** de n : $n = a_1 + \cdots + a_k$ avec $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$.
   (a) Montrer par l'absurde que les entiers $a_1, \ldots, a_k$ sont inférieurs ou égaux à 4.
   Indication : ne pas oublier que la partition est supposée maximale.
   (b) Expliquer pourquoi remplacer les coefficients 4 par $2+2$ dans la partition de n ne change pas la valeur du produit.
   Que peut-on donc supposer sur les entiers $a_1, \ldots, a_k$?
   (c) Montrer par l'absurde que $a_1 \geq 2$.
   (d) Montrer que parmi les entiers $a_1, \ldots, a_k$ il y en a au plus deux égaux à 2.
3. Donner alors la valeur du maximale du produit en fonction du reste de la division euclidienne de n par 3