PCSI1 - DEVOIR SURVEILLE N ° 3 **Année scolaire 2017-2018**
Samedi 20 octobre 2018

Durée du devoir : 2h00.

Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les exercices sont indépendants. La meilleure stratégie est d'en traiter au moins correctement. À l'inverse, tous les bacler ne rapporte aucun point.

Exercice 1 : Équation trigonométrique

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, \pi[$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin\big((2k+1)x\big) = \frac{\sin^2(nx)}{\sin(x)}$ de deux manières différentes :
   (a) en procédant par récurrence, après avoir justifié que :
   $$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \sin(a)\times\sin(b) = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b)-\cos(a+b)\big) = \sin^2\left(\frac{a+b}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
   (b) par un calcul direct après avoir montré que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin\big((2k+1)x\big) = \mathcal{I}\mathrm{m}\left(\mathrm{e}^{ix}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{i2x}\right)^k\right)$.
2. **EN DÉDUIRE** les solutions dans $]0, \pi[$ de l'équation :
   $$\sin x + \sin(3x) - \sin(4x) + \sin(5x) + \sin(7x) = 0$$

Exercice 2 :

Soit $(a_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombre complexes. On pose $P_0 = 1$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$P_k = \prod_{j=1}^{k}(1-a_j) = (1-a_1)\times(1-a_2)\times\cdots\times(1-a_k)$$

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Quelle relation de récurrence très simple existe-t-il entre P_k et P_{k+1} ?
2. Démontrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a
   $$P_k + \sum_{i=1}^{k} a_i P_{i-1} = 1.$$

Dans la suite, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et, pout tout $j \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_j = \dfrac{j}{n}$ de sorte que

$$P_k = \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{j}{n}\right).$$

3. (a) Calculer P_n.

   (b) Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a : $P_k = \dfrac{k!}{n^k} \times \dbinom{n-1}{k}$

   (c) La formule de la question précédente est-elle encore valable pour $k = 0$? Pour $k = n$?

4. Conclure que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \times \frac{k!}{n^k} = 1$

<u>Exercice 3</u> : Nombre de dérangements

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $p \in [\![0, n]\!]$ vérifier que

$$\sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p} = \binom{n}{n-p} 0^{n-p} = \begin{cases} 0 \text{ si } p \leq n-1 \\ 1 \text{ si } p = n \end{cases}$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note D_n le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$ qui n'ont aucun point fixe. On pose aussi $D_0 = 1$.

   (a) Par énumération de cas vérifier que $D_1 = 0$, $D_2 = 1$ et $D_3 = 2$.

   (b) En dénombrant les permutations de $[\![1, n]\!]$ suivant leur nombre k de points fixes, montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k = n!$$

   (c) Vérifier successivement les égalités suivantes :

$$n! \times \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (n-k)! = \sum_{p=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p} D_p \right) = D_n$$

   On précisera bien le moment où on a utilisé une permutation de $\sum$.

3. On reprend les notations de la question 2.

   (a) En remarquant que toute permutation de $[\![1, n+1]\!]$ sans aucun point fixe envoie $n+1$ sur un entier $k \in [\![1, n]\!]$, montrer que :

$$D_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \big(D_n + D_{n-1}\big) = n\big(D_n + D_{n-1}\big)$$

   (b) Montrer alors par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}, \quad D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$$

   (c) Montrer ensuite que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}, \quad \frac{D_n}{n!} - \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

   En sommant ces égalités, retrouver la formule de la question 2.(c).