**PCSI1 - DEVOIR SURVEILLE N ° 4** **Année scolaire 2017-2018**
**Samedi 17 novembre 2018**

# *Durée du devoir : 2h00*

*Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

## **<u>EXERCICE</u> : Un problème de Cauchy**

Le but de cet exercice est de résoudre sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' + \tan(t)y = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

1. (a) Déterminer des constantes $\alpha$ et $\beta$ telles que :

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-x^2} = \frac{\alpha}{1+x} + \frac{\beta}{1-x}$$

   (b) En déduire une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ sur l'intervalle $]-1, 1[$.

2. Pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on pose :

$$F(t) = \int_0^t \frac{1}{\cos(\theta)} \, \mathrm{d}\theta$$

   (a) Montrer que $F$ est définie et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et donner l'expression de $F'(t)$.

   (b) En utilisant le changement de variable $\theta = \arcsin(x)$, montrer que $F(t) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+\sin(t)}{1-\sin(t)}}\right)$.

3. Résoudre sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + \tan(t)y = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

**<u>PROBLEME</u> : Résolution d'une équation différentielle**

**<u>Partie I</u> : Étude d'une fonction**

On considère la fonction $f$ définie par $f(t) = \arccos\left(\dfrac{1-t}{1+t}\right)$.

1. Rappeler (sans démonstration) l'ensemble de définition de la fonction arccos, son domaine de dérivabilité et l'expression de $\arccos'(t)$.
2. Justifier que l'ensemble de définition de $f$ est $\mathbb{R}^+$.
3. (a) Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\forall t > 0, \quad f'(t) = \frac{1}{(1+t)\sqrt{t}}$$

   (b) Montrer que la fonction $t \longmapsto \arctan(\sqrt{t})$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* *$ et calculer sa dérivée.

   (c) En déduire que :

$$\forall t \geq 0, \quad f(t) = 2\arctan(\sqrt{t})$$

**<u>Partie II</u> : Calcul d'une primitive**

4. En remarquant que $\dfrac{t^2}{1+t^2} = 1 - \dfrac{1}{1+t^2}$ déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \longmapsto \dfrac{t^2}{1+t^2}$.
5. On considère la fonction $G$ définie par :

$$\forall t > 0, \quad G(t) = \int_1^t \frac{\sqrt{s}}{1+s}\,\mathrm{d}s$$

   À l'aide du changement de variable $s = x^2$ et de la question précédente, calculer une expression de $G(t)$.

6. A l'aide d'une intégration par parties bien choisie, vérifier que :

$$\forall t > 0, \quad G(t) = 2t\arctan(\sqrt{t}) - \frac{\pi}{2} - 2\int_1^t \arctan(\sqrt{s})\,\mathrm{d}s$$

   En déduire une primitve $F$ de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

**<u>Partie III</u> : Une équation différentielle**

7. Déterminer l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle :

$$(E_0) \qquad 2ty' - y = 0$$

8. Déterminer l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad 2ty' - y = \frac{2t}{1+t}$$

   On exprimera les solutions à l'aide de la fonction $f$ de la partie I.